Aus
Natur und Geisteswelt

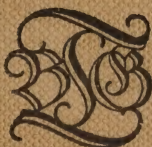
120

P. Crantz

Arithmetik und Algebra

I

Achte Auflage



B. G. Teubner · Leipzig · Berlin

„Au … elt"

nunmehr i … ungen"
in die Hau … icht des
Laien n … Entstehen
(1898) de … ntwickelte
Volksho … digen die
Möglichke … uelle, wie
sie die Da … ber jedes
Gebiet de … ihn dabei
zugleich u … iternd,
die Einsi … esem Be-
dürfnis kö … rbüchern
nie entspre … n voraus.

Die S … zuver-
lässige … Gebiete
des geisti … llem auch
dem imm … nen, sich
auf den …

In den … nswerter
Weise von Anfang an die besten Namen gestellt, gern die Gelegenheit benutzend, sich an weiteste Kreise zu wenden.

So konnte der Sammlung auch der Erfolg nicht fehlen. Mehr als die Hälfte der Bände liegen, bei jeder Auflage durchaus neu bearbeitet, bereits in 2. bis 9. Auflage vor, insgesamt hat die Sammlung bis jetzt eine Verbreitung von fast 5 Millionen Exemplaren gefunden.

Alles in allem sind die schmucken, gehaltvollen Bände besonders geeignet, die Freude am Buche zu wecken und daran zu gewöhnen, einen Betrag, den man für Erfüllung körperlicher Bedürfnisse nicht anzusehen pflegt, auch für die Befriedigung geistiger anzuwenden.

Wenn eine Verteuerung der Sammlung infolge der durch die wirtschaftliche Lage bedingten außerordentlichen Steigerung der Herstellungskosten auch unvermeidbar gewesen ist, so ist der Preis doch entfernt nicht in dem gleichen Verhältnis gestiegen, und auch jetzt ist ein Band „Aus Natur und Geisteswelt" im Verhältnis zu anderen Büchern und insbesondere zu der Verteuerung im allgemeinen wohlfeil.

Jeder der meist reich illustrierten Bände
ist in sich abgeschlossen und einzeln käuflich

Leipzig, im Januar 1923. B. G. Teubner

Ein vollständiges, nach Wissensgebieten geordnetes Verzeichnis versendet auf Wunsch der Verlag, Leipzig, Poststr. 3/5

...mie

... Mit 42 Figuren

...ienrat P. Cranz. ...einer und mehreren ... Text. (Bd. 120.) ...ins- und Renten- ...iguren. (Bd. 205.) ...ahlreichen Übungs-

...alewski. 3., ver-

...ung in der Technik ...Dr. M. Lindow.

...in der Technik mit ...Lindow. 3. Aufl.

...ung in der Technik ...M. Lindow. Mit

...Bd. 668.) ...Quadrate. Von

...Dröll. (Bd. 724.)

...Cranz. 3. Aufl.

...it Prof. P. Cranz.

...Studienrat Prof.

...n Geh. Studienrat

...scher. Mit 59 Fig.

...I. Teil: Graphische ...anische Rechenhilfs- ...verbesserte Auflage. ...ichnen, Projektions-

...ungsrat Dipl.-Ing.

...z. Mit 172 Abb.

...ndung auf die Dar- ...Parallelprojektion in ...Von akad. Zeichen-

Die Grundzüge der Perspektive nebst Anwendungen. Von Prof. Dr. K. Doehlemann. 2. Aufl. Mit 91 Figuren und 11 Abbildungen. (Bd. 510.)

„Au… …elt"

nunmehr über 800 … …ungen" in die Hauptwissensgebiete für den **Unterricht** oder Selbstun…icht des **Laien** nach den heutigen methodischen Anforderungen, seit ihrem Entstehen (1898) den Gedanken dienend, auf denen die heute so mächtig entwickelte **Volkshochschulbewegung** beruht. Sie will jedem geistig Mündigen die Möglichkeit schaffen, sich ohne besondere Vorkenntnisse an sicherster Quelle, wie sie die Darstellung durch berufene Vertreter der Wissenschaft bietet, über jedes Gebiet der Wissenschaft, Kunst und Technik zu unterrichten. Sie will ihn dabei zugleich unmittelbar im **Beruf fördern**, den **Gesichtskreis erweiternd**, die **Einsicht** in die Bedingungen der Berufsarbeit **vertiefend**. Diesem Bedürfnis können Skizzen im Charakter von „Auszügen" aus großen Lehrbüchern nie entsprechen, denn solche setzen eine Vertrautheit mit dem Stoffe schon voraus.

Die Sammlung bietet aber auch dem **Fachmann** eine rasche **zuverlässige Übersicht** über die sich heute von Tag zu Tag weitenden Gebiete des geistigen Lebens in weitestem Umfang und vermag so vor allem auch dem immer stärker werdenden Bedürfnis des **Forschers** zu dienen, sich auf **den Nachbargebieten** auf dem laufenden zu erhalten.

In den Dienst dieser Aufgabe haben sich darum auch in dankenswerter Weise von Anfang an die besten Namen gestellt, gern die Gelegenheit benutzend, sich an weiteste Kreise zu wenden.

So konnte der Sammlung auch der Erfolg nicht fehlen. Mehr als die Hälfte der Bände liegen, bei jeder Auflage durchaus neu bearbeitet, bereits in 2. bis 9. Auflage vor, insgesamt hat die Sammlung bis jetzt eine Verbreitung von fast 5 Millionen Exemplaren gefunden.

Alles in allem sind die schmucken, gehaltvollen Bände besonders geeignet, die Freude am Buche zu wecken und daran zu gewöhnen, einen Betrag, den man für Erfüllung körperlicher Bedürfnisse nicht anzusehen pflegt, auch für die Befriedigung geistiger anzuwenden.

Wenn eine Verteuerung der Sammlung infolge der durch die wirtschaftliche Lage bedingten außerordentlichen Steigerung der Herstellungskosten auch unvermeidbar gewesen ist, so ist der Preis doch entfernt nicht in dem gleichen Verhältnis gestiegen, und auch jetzt ist ein Band „Aus Natur und Geisteswelt" im Verhältnis zu anderen Büchern und insbesondere zu der Verteuerung im allgemeinen wohlfeil.

Jeder der meist reich illustrierten Bände
ist in sich abgeschlossen und einzeln käuflich

Leipzig, im Januar 1923. **B. G. Teubner**

Ein vollständiges, nach Wissensgebieten geordnetes Verzeichnis versendet auf Wunsch der Verlag, Leipzig, Poststr. 3/5

Zur Mathematik und Astronomie
sind bisher erschienen:

Einführung in die Mathematik.

Einführung in die Mathematik. Von Studienrat W. Mendelssohn. Mit 42 Figuren im Text. (Bd. 503.)

Arithmetik, Algebra und Analysis.

Arithmetik und Algebra zum Selbstunterricht. Von Geh. Studienrat P. Crantz. 2 Bände. I. Teil: Die Rechnungsarten. Gleichungen ersten Grades mit einer und mehreren Unbekannten. Gleichungen zweiten Grades. 7. Aufl. Mit 9 Figuren im Text. (Bd. 120.) II. Teil: Gleichungen. Arithmetische und geometrische Reihen. Zinseszins- und Rentenrechnung. Komplexe Zahlen. Binomischer Lehrsatz. 5. Aufl. Mit 21 Textfiguren. (Bd. 205.)

Lehrbuch der Rechenvorteile. Schnellrechnen und Rechenkunst. Mit zahlreichen Übungsbeispielen. Von Ing. Dr. phil. J. Bojko. (Bd. 739.)

Einführung in die Infinitesimalrechnung. Von Prof. Dr. G. Kowalewski. 3., verbesserte Aufl. Mit 18 Figuren. (Bd. 197.)

Differentialrechnung unter Berücksichtigung der praktischen Anwendung in der Technik mit zahlreichen Beispielen und Aufgaben versehen. Von Studienrat Dr. M. Lindow. 4. Aufl. Mit 50 Figuren und 161 Aufgaben. (Bd. 387.)

Integralrechnung unter Berücksichtigung der praktischen Anwendung in der Technik mit zahlreichen Beispielen und Aufgaben versehen. Von Studienrat Dr. M. Lindow. 3. Aufl. Mit 43 Figuren im Text und 200 Aufgaben. (Bd. 673.)

Differentialgleichungen unter Berücksichtigung der praktischen Anwendung in der Technik mit zahlreichen Beispielen und Aufgaben versehen. Von Studienrat Dr. M. Lindow. Mit 38 Figuren im Text und 160 Aufgaben. (Bd. 589.)

***Einführung in die Vektorrechnung.** Von Prof. Dr. F. Jung. (Bd. 668.)

Die Ausgleichungsrechnung nach der Methode der kleinsten Quadrate. Von Geh. Reg.-Rat Prof. E. Hegemann. Mit 11 Fig. i. Text. (Bd. 609.)

Kaufmännisches Rechnen zum Selbstunterricht. Von Studienrat K. Dröll. (Bd. 724.)

Geometrie.

Planimetrie zum Selbstunterricht. Von Geh. Studienrat Prof. P. Crantz. 3. Aufl. Mit 94 Figuren im Text. (Bd. 340.)

Ebene Trigonometrie zum Selbstunterricht. Von Geh. Studienrat Prof. P. Crantz. 3. Aufl. Mit 50 Figuren im Text. (Bd. 431.)

Sphärische Trigonometrie zum Selbstunterricht. Von Geh. Studienrat Prof. P. Crantz. Mit 27 Figuren im Text. (Bd. 605.)

Analytische Geometrie der Ebene zum Selbstunterricht. Von Geh. Studienrat Prof. P. Crantz. 3. Aufl. Mit 55 Figuren im Text. (Bd. 504.)

Einführung in die darstellende Geometrie. Von Prof. P. B. Fischer. Mit 59 Fig. im Text. (Bd. 541.)

Angewandte Mathematik.

Praktische Mathematik. Von Prof. Dr. R. Neuendorff. 2 Bde. I. Teil: Graphische Darstellungen. Verkürztes Rechnen. Das Rechnen mit Tabellen. Mechanische Rechenhilfsmittel. Kaufm. Rechnen im tägl. Leben. Wahrscheinlichkeitsrechnung. 2., verbesserte Auflage. Mit 29 Figuren und 1 Tafel. (Bd. 341.) II. Teil: Geometrisches Zeichnen, Projektionslehre, Flächenmessung, Körpermessung. Mit 133 Figuren. (Bd. 526.)

Die Rechenmaschinen und das Maschinenrechnen. Von Regierungsrat Dipl.-Ing. K. Lenz. Mit 43 Abbildungen. (Bd. 490.)

Geometrisches Zeichnen. Von akad. Zeichenlehrer A. Schudeisky. Mit 172 Abb. im Text und auf 12 Tafeln. (Bd. 568.)

Projektionslehre. Die rechtwinklige Parallelprojektion und ihre Anwendung auf die Darstellung technischer Gebilde nebst einem Anhang über die schiefwinklige Parallelprojektion in kurzer leichtfaßlicher Darstellung für Selbstunterricht und Schulgebrauch. Von akad. Zeichenlehrer A. Schudeisky. Mit 208 Abbildungen im Text. (Bd. 564.)

Die Grundzüge der Perspektive nebst Anwendungen. Von Prof. Dr. K. Doehlemann. 2. Aufl. Mit 91 Figuren und 11 Abbildungen. (Bd. 510.)

Angewandte Mathematik.

Graphisches Rechnen. Von Prof. O. Prölß. Mit 164 Fig. im Text. (Bd. 708.)

Die graphische Darstellung. Eine allgemeinverständliche, durch zahlreiche Beispiele aus allen Gebieten der Wissenschaft und Praxis erläuterte Einführung in den Sinn und Gebrauch der Methode. Von Hofrat Prof. Dr. F. Auerbach. 2. Aufl. Mit 139 Fig. im Text. (Bd. 437.)

Maße und Messen. Von Dr. W. Block. Mit 34 Abbildungen. (Bd. 385.)

Nautik. Von Direktor Dr. J. Möller. 2. Aufl. Mit 64 Figuren im Text und 1 Seekarte. (Bd. 255.)

Die Landmessung. Von Geh. Finanzrat F. Suckow. Mit 69 Zeichnungen im Text. (Bd. 608.)

Photogrammetrie (Einfache Stereo- und Luftphotogrammetrie). Von Dipl.-Ing. Hermann Lüscher. Mit 78 Figuren im Text und auf 2 Tafeln. (Bd. 612.)

Kartenkunde. Von Finanzrat Dr. Ing. A. Egerer. I. Einführung in das Kartenverständnis. Mit 49 Abbildungen im Text. (Bd. 610.)

Mathematische Spiele.

Mathematische Spiele. Von Dr. W. Ahrens. 4., verbesserte Aufl. Mit 1 Titelbild und 78 Figuren. (Bd. 170.)

Das Schachspiel und seine strategischen Prinzipien. Von Dr. M. Lange. Mit den Bildn. E. Laskers u. P. Morphys, 1 Schachbrettafel u. 43 Diagrammen. 3. Aufl. (Bd. 281.)

Geschichte.

Naturwissenschaften, Mathematik und Medizin im klassischen Altertum. Von Prof. Dr. Joh. L. Heiberg. 2. Aufl. Mit 2 Figuren. (Bd. 370.)

Astronomie und Astrologie.

Der Bau des Weltalls. Von Prof. Dr. J. Scheiner. 5. Aufl. Bearbeitet von Prof. Dr. P. Guthnick. Mit 28 Figuren im Text. (Bd. 24.)

Entstehung der Welt und der Erde nach Sage und Wissenschaft. Von Geh. Regierungsrat Prof. Dr. M. B. Weinstein. 3. Aufl. (Bd. 223.)

Weltuntergang in Sage und Wissenschaft. Von Prof. Dr. K. Ziegler. und Prof. Dr. S. Oppenheim. (Bd. 720.)

Das astronomische Weltbild im Wandel der Zeit. Von Prof. Dr. S. Oppenheim.
I. Teil: Vom Altertum bis zur Neuzeit. 3. Auflage. Mit 18 Abbildungen. (Bd. 444.)
II. Teil. Moderne Astronomie. 2. Auflage. Mit 9 Figuren im Text und 1 Tafel. (Bd. 445.)

Astronomie in ihrer Bedeutung für das praktische Leben. Von Professor Dr. A. Marcuse. 2. Aufl. Mit 20 Abbildungen. (Bd. 378.)

Die Planeten. Von Prof. Dr. B. Peter. Mit 16 Figuren. 2. Aufl. von Observ. Dr. H. Naumann. (Bd. 240.)

Der Kalender. Von Prof. Dr. W. F. Wislicenus. 2. Aufl. (Bd. 69.)

Sternglaube und Sterndeutung. Die Geschichte und das Wesen der Astrologie. Unter Mitwirkung von Geh. Rat Prof. Dr. C. Bezold dargestellt von Geh. Hofrat Prof. Dr. Franz Boll. 2. Aufl. Mit 1 Sternkarte und 20 Abbildungen. (Bd. 638.)

Meteorologie.

Einführung in die Wetterkunde. Von Prof. Dr. L. Weber. 3. Aufl. Mit 28 Abbildungen im Text und 3 Tafeln. (Bd. 55.)

Unser Wetter. Einführung in die Klimatologie Deutschlands an der Hand von Wetterkarten. Von Dr. R. Hennig. 2. Aufl. Mit 48 Abb. im Text. (Bd. 349.)

Die mit * bezeichneten u. weitere Bände befinden sich in Vorb.

Aus Natur und Geisteswelt
Sammlung wissenschaftlich-gemeinverständlicher Darstellungen

120. Band

Arithmetik und Algebra zum Selbstunterricht

Von

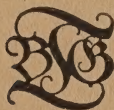
Paul Crantz †
Geh. Studienrat

Erster Teil

Die Rechnungsarten · Gleichungen ersten Grades mit einer und mehreren Unbekannten Gleichungen zweiten Grades

Mit 9 Figuren im Text

Achte Auflage
42. bis 46. Tausend



Verlag von B. G. Teubner in Leipzig und Berlin 1923

Vorwort.

Das vorliegende Buch ist für diejenigen bestimmt, welche ohne weitere Hilfe durch eigene Arbeit sich mit den Grundlehren der Arithmetik und Algebra bekannt machen wollen. Es bietet diese Lehren in leichtfaßlicher und ausführlicher Darstellung. Nur die Bekanntschaft mit dem gewöhnlichen Rechnen wird vorausgesetzt. Das Besprochene ist überall durch wirklich ausgerechnete Beispiele erläutert. Über die Anordnung des Stoffes gibt das Inhaltsverzeichnis ausführliche Auskunft.

Eine größere Anzahl von Aufgaben zu dem zweiten Abschnitte dieses Teiles und zu dem zweiten Teile der Arithmetik und Algebra (ANuG Bd. 205) findet sich in meiner kleinen Sammlung „Arithmetische Aufgaben für Lyzeen und Studienanstalten", B. G. Teubner, Leipzig. Zweite Auflage 1913.

Berlin-Friedenau, im Oktober 1918.

P. Crantz.

Druck von B. G. Teubner in Leipzig.

Inhalt.

Erster Abschnitt.

Die vier Grundrechnungsarten und die Gleichungen ersten Grades.

§ 1. Die Zahl. Das Zählen.

Das Vorkommen gleicher oder gleichartiger Dinge in verschiedenen Mengen veranlaßt uns, diese Mengen nach ihrer Größe miteinander zu vergleichen. Dieses Vergleichen wird dadurch ermöglicht, daß wir ermitteln und angeben, wie oft das einzelne Ding in jeder Menge enthalten ist. Auf der tiefsten Stufe menschlicher Entwicklung konnte man sicherlich nur bei ganz kleinen Mengen genauere Angaben machen. Es genügte dann wohl zur Bezeichnung die Angabe: eins, eins und eins, eins und eins und eins usw., wie wir sie von Kindern zuweilen hören. Bei weiterer Entwicklung schuf die Sprache für die Anzahl der in diesen kleinsten Mengen vorkommenden Dinge besondere Namen. Es entstanden die Zahlen eins, zwei, drei usw. *Zahlen sind also Summen von Einheiten.* Mit der Namengebung ging man bis zur zehn. Die Bezeichnung noch größerer Mengen als von zehn Dingen wurde dann mit wenigen Ausnahmen durch geeignete Zusammenstellung der ersten Zahlwörter ausgeführt.

Solange man Mengen ganz bestimmter Dinge in dieser Weise angab, fügte man stets zu dem Zahlwort den Namen des in der betrachteten Menge wiederholt vorkommenden Dinges hinzu. Eine Zahl mit dahinter gesetzter Benennung des Dinges, dessen Menge man ermittelt, nennt man eine *benannte Zahl*, z. B. 5 Meter, 17 Bäume usw. Eine Zahl ohne hinzugefügte Benennung heißt eine *unbenannte Zahl*.

Geht man von der Eins aus, fügt eine neue Eins hinzu, zu der erhaltenen Zahl wieder eine neue Eins usf. und nennt jedesmal die dadurch erhaltene Zahl bei ihrem Namen, so sagt man: man *zählt*. Die beim Zählen von eins an nacheinander genannten Zahlen bilden die *Zahlenreihe* und heißen die *natürlichen Zahlen*. Das Zählen kann auch von einer höheren Zahl als der Eins beginnen. Da man stets durch Hinzufügen von eins zu einer gegebenen, noch so großen Zahl auf eine neue Zahl kommt, so erkennt man leicht: **Die Zahlenreihe ist unbegrenzt nach oben.**

Man kann aber auch von einer beliebigen Zahl ausgehend dadur
zu neuen Zahlen gelangen, daß man von der Zahl eine Eins for
nimmt, von der so erhaltenen Zahl wieder eine Eins fortnimmt u
und jedesmal die hierdurch erhaltene Zahl bei ihrem Namen nenn
Man sagt dann, man zählt rückwärts, und nennt im Gegensa
hierzu das vorher auseinandergesetzte Zählen „vorwärts zählen"
Bei diesem Rückwärtszählen kann man nicht beliebig weit zurückgehe
Schließlich stößt man auf eins. Nimmt man auch diese Eins noch for
so bleibt nichts mehr übrig. Daß man auf diese Stelle beim Zähle
gekommen ist, deutet man an durch Null.

Aus diesen Betrachtungen folgt: Die Zahlenreihe ist vo
Null an nach oben unbegrenzt, sie besitzt als untere Grenz
die Null.

Durch eine Zeichnung kann man sich hiervon eine Vorstellun
verschaffen. Auf einer Geraden (Fig. 1) nehme man einen beliebige

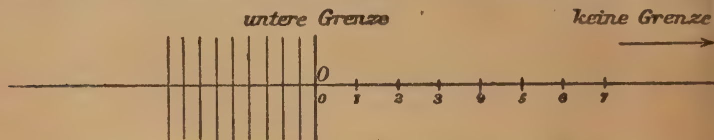


Fig. 1.

Punkt O an und trage, von O ausgehend, etwa nach rechts eine be
liebige Strecke so oft man will hintereinander ab und betrachte di
Strecken $O1$, $O2$, $O3$, ... als die graphische Darstellung de
Zahlen 1, 2, 3, ... Man sieht, daß man von O aus nach recht
auf der unendlichen Geraden nie an das Ende kommt, während be
O nach links eine Grenze sich befindet, und daß jenseits von O au
der linken Seite überhaupt keine Zahlen dargestellt werden könne

§ 2. Das Rechnen. Die Rechnungsarten.

Beim Zählen wird aus einer beliebigen Zahl und aus de
Eins stets eine neue Zahl gebildet durch Hinzufügung der Eins ode
durch Fortnahme der Eins von der Zahl. Bildet man aus zwei be
liebigen Zahlen auf irgendeine Weise eine neue Zahl, so nennt ma
dies „rechnen" und unterscheidet je nach der Art, wie aus den ge
gebenen beiden Zahlen die neue Zahl gebildet wird, verschiedene Rech
nungsarten. Bei Ausführung dieser Rechnungsarten stellen sic
manche Gesetze, „Rechengesetze", heraus, die aber schwer erkennba
sind, solange man mit den bestimmten Zahlen rechnet. Um sie deutlic

hervortreten zu lassen, hat man sich daran gewöhnt, Zahlen durch kleine lateinische Buchstaben: $a, b, c, \ldots$ zu bezeichnen. Die aus zwei durch Buchstaben bezeichneten Zahlen gewonnene neue Zahl erscheint dann nicht mehr als einfache Zahl (als ein neuer Buchstabe), sondern ist aus den beiden ursprünglichen Buchstaben zusammengesetzt, die je nach der ausgeführten Rechnungsart auf eine im Laufe der Zeit vereinbarte Schreibweise nebeneinander geschrieben oder durch ein besonderes Zeichen, das Rechnungszeichen, miteinander verbunden sind.

So findet man, wenn man die schon aus dem gewöhnlichen Rechnen bekannten vier Rechnungsarten: Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division mit den Zahlen a und b ausführt: durch Addieren $a + b$, durch Subtrahieren $a - b$, durch Multiplizieren $a \cdot b$ und durch Dividieren $a : b$, oder in anderer Schreibweise $\frac{a}{b}$. Die hierbei verwendeten Zeichen „$+$", „$-$", „$\cdot$", „$:$" sind die für die genannten Rechnungsarten gebräuchlichen Rechnungszeichen.

Will man die Gleichheit zweier Zahlen ausdrücken, so pflegt man dieselben durch das Zeichen „$=$", das Gleichheitszeichen, zu verbinden ($a = b$, $3 \cdot 4 = 12$) und nennt den dadurch erhaltenen Ausdruck eine Gleichung. Die beiden rechts und links von dem Gleichheitszeichen stehenden Ausdrücke heißen die rechte und die linke Seite der Gleichung.

§ 3. Grundsätze.

Gewonnene Erkenntnisse pflegen wir in Sätzen, die den Inhalt der Erkenntnisse angeben, auszusprechen. Diese Sätze sind entweder beweisbar (**Lehrsätze**) oder nicht beweisbar (**Grundsätze**). Sätze sind beweisbar heißt, wir können ihren Inhalt als richtig darstellen, indem wir einfachere, schon als richtig erkannte Sätze zur Hilfe nehmen. Sätze sind nicht beweisbar oder Grundsätze, wenn wir die in ihnen ausgesprochene Behauptung nicht durch einfachere Wahrheiten erklären können.

Die wichtigsten Grundsätze sind:

I. Jede Größe ist sich selbst gleich ($a = a$, $b + c = b + c$).

II. Das Ganze ist gleich der Summe seiner Teile. Das Ganze ist größer als jeder seiner Teile.

III. Gleiche Größen darf man füreinander setzen.

Mit Hilfe dieser drei Grundsätze läßt sich nun noch eine Reihe von Sätzen herleiten, die vielfach auch zu den Grundsätzen gezählt werden.

Ist $a = b$ und $c = b$, so folgt, wenn man nach Grundsatz III in der Gleichung $a = b$ die Größe b durch c ersetzt: $a = c$. Man spricht dies folgendermaßen aus:

IV. **Sind zwei Größen einer dritten gleich, so sind sie einander gleich.**

Ist ferner $a = a_1$, und $b = b_1$, und man ersetzt in den nach Grundsatz I richtigen Gleichungen

$$a + b = a + b,$$
$$a - b = a - b,$$
$$a \cdot b = a \cdot b,$$
$$\frac{a}{b} = \frac{a}{b}$$

auf der rechten Seite a und b durch die ihnen gleichen Größen a_1 bzw. b_1 (Grundsatz III), so findet man

$$a + b = a_1 + b_1,$$
$$a - b = a_1 - b_1,$$
$$a \cdot b = a_1 \cdot b_1$$
$$\frac{a}{b} = \frac{a_1}{b_1}$$

Diese vier Gleichungen liefern die Sätze:

Va. Gleiches zu Gleichem addiert gibt Gleiches.
Vb. Gleiches von Gleichem subtrahiert gibt Gleiches.
Vc. Gleiches mit Gleichem multipliziert gibt Gleiches.
Vd. Gleiches durch Gleiches dividiert gibt Gleiches.

§ 4. Die Addition.

1. Erklärung: Die Zahl b zu der Zahl a addieren heißt die Einheiten von b zu den Einheiten von a hinzufügen und auf diese Weise eine neue Zahl bestimmen.

Das Ergebnis der Addition der Zahlen a und b, das heißt die Zahl, welche man erhält, wenn man b zu a addiert, schreibt man $a + b$ (gesprochen „a plus b") und nennt es Summe. Die Zahlen a und b heißen die Summanden.

Sind die Buchstabengrößen in beiden Summanden dieselben, so kann man die Summe als eine Zahl angeben ohne das Rechnungszeichen. So ergibt die Addition der beiden Zahlen $3a$ und $7a$ die Summe $3a + 7a$ oder $10a$.

Die vor den Buchstaben stehenden Zahlen, in unserem Beispiel 3, 7, 10, nennt man Koeffizienten.

Die bei der Addition ausgeübte Tätigkeit unterscheidet sich also von der beim Vorwärtszählen ausgeübten nur dadurch, daß man zu einer Zahl nicht stets die Eins, sondern eine beliebige andere Zahl, eine Menge von Einheiten, hinzufügt und auf diese Weise eine neue Zahl bildet. Das Vorwärtszählen ist ein besonderer Fall der Addition.

2. Das Ergebnis der Addition zweier Zahlen findet man, indem man die beiden Zahlen durch das Additionszeichen „+" verbunden nebeneinander schreibt. Nun sind Zahlen Summen von Einheiten (§ 1), also Summen von der Form $1 + 1$, $1 + 1 + 1$, $1 + 1 + 1 + 1, \ldots$ Denkt man sich die Zahlen in dieser Weise geschrieben und dann addiert, so erkennt man sofort

Das Kommutationsgesetz: Der Wert einer Summe ist unabhängig von der Folge der Summanden.

Man kann dieses Gesetz auch ausdrücken durch die Gleichung

$$a + b = b + a.$$

Eine solche ein Gesetz in arithmetischer Schreibweise darstellende Gleichung nennt man eine Formel.

3. Soll eine Summe einer Rechnung unterworfen werden, so muß man sie in eine Klammer einschließen. Soll z. B. die Summe $b + c$ zu a addiert werden, so deutet man dies an, indem man schreibt

$$a + (b + c).$$

Für die Ausführung dieser Aufgabe gilt der

Lehrsatz über die Addition einer Summe. Statt eine Summe zu addieren, kann man die Summanden einzeln nacheinander in beliebiger Folge addieren.

Formel: $a + (b + c) = a + b + c.$

Beispiel: 1. $3a + (7a + 5b) = 3a + 7a + 5b$
$= 10a + 5b.$

2. $4a + (5b + 6a) + (3a + 2b) + 4b$
$= 4a + 5b + 6a + 3a + 2b + 4b$
$= 4a + 6a + 3a + 5b + 2b + 4b$ (§ 4, 2)
$= 13a + 11b.$

Dieser Lehrsatz findet beim Kopfrechnen vielfach Anwendung, indem man die zu addierende Zahl in eine Summe zweier Zahlen umwandelt und nun die Summanden dieser Summe einzeln nacheinander addiert. So ist

$$97 + 35 = 97 + (3 + 32) = 97 + 3 + 32 = 100 + 32 = 132,$$

oder

$$97 + 35 = 97 + (30 + 5) = 97 + 30 + 5 = 127 + 5 = 132.$$

§ 5. Die Subtraktion.

1. Erklärung: Die Zahl b von der Zahl a subtrahieren heißt die Einheiten von b von den Einheiten von a fortnehmen und auf diese Weise eine neue Zahl bestimmen.

Das Ergebnis der Subtraktion der Zahl b von der Zahl a schreibt man $a - b$ (gesprochen „a minus b") und nennt es Differenz. Die Zahl a, von der subtrahiert wird, nennt man den Minuendus, die Zahl b, welche subtrahiert wird, den Subtrahendus.

Auch die Differenz kann man, wenn die Buchstabengrößen dieselben sind, als eine Zahl angeben, so erhält man, wenn man $3a$ von $8a$ subtrahiert, $8a - 3a = 5a$.

Die bei der Subtraktion ausgeübte Tätigkeit unterscheidet sich von der beim Rückwärtszählen ausgeübten nur dadurch, daß man von einer Zahl nicht stets die Eins, sondern eine beliebige andere Zahl fortnimmt und auf diese Weise eine neue Zahl bildet.

Das Rückwärtszählen ist ein besonderer Fall der Subtraktion.

Für die Differenz gilt ein Kommutationsgesetz nicht. Dies ist der Grund, weshalb man hier den Zahlen a und b verschiedene Namen gegeben hat, während bei der Summe beide durch denselben Namen bezeichnet werden durften.

Wie die Summe, so muß auch die Differenz, wenn mit ihr eine Rechnung vorgenommen werden soll, in Klammern eingeschlossen werden.

Die Subtraktion führt zu folgenden Lehrsätzen:

2. Soll man von 15 die Summe der Zahlen 7 und 5 subtrahieren, so schreibt man

$$15 - (7 + 5).$$

Man kann diese Aufgabe lösen, indem man zunächst die Summe $7 + 5 = 12$ bildet und dann 12 von 15 subtrahiert. Man kann sich aber auch fragen, ob man sich nicht die Bildung der Summe ersparen könne. Subtrahiert man von 15 zunächst 7, so ist das Resultat 8 zu groß, und zwar um 5 zu groß, da man 7 und 5 subtrahieren sollte; man muß daher, um das gewünschte Resultat zu bekommen, von der erhaltenen 8 noch 5 abziehen. Dies ergibt 3.

Diese Überlegung liefert den

Lehrsatz über die Subtraktion einer Summe. Statt eine Summe zu subtrahieren, darf man die Summanden einzeln nacheinander in beliebiger Folge subtrahieren.

Formel: $a-(b+c)=a-b-c$.

Beispiel: $50a+(3a+11b)-(7a+8b)=$

$50a+3a+11b-7a-8b=46a+3b$.

Anwendung beim Kopfrechnen:

$157-69=157-(57+12)$

$=157-57-12=100-12=88$.

$157-69=157-(60+9)$

$=157-60-9=97-9=88$.

3. Soll man zu 15 die Differenz der Zahlen 7 und 5 addieren, so schreibt man

$$15+(7-5).$$

Würde man, statt einfach die Differenz $7-5=2$ zu addieren, zunächst 7 addieren, so wäre das Resultat um 5 zu groß, da man nicht 7, sondern die um 5 kleinere Zahl addieren soll. Man muß also, um das richtige Resultat zu erhalten, von der gewonnenen Summe noch 5 abziehen. Hierdurch findet seine Erklärung der

Lehrsatz über die Addition einer Differenz. Statt eine Differenz zu addieren, darf man den Minuendus addieren und den Subtrahendus subtrahieren.

Formel: $a+(b-c)=a+b-c$.

Beispiel: $37a+(15b-8a)-(5b+9a)=$

$37a+15b-8a-5b-9a=20a+10b$.

Anwendung beim Kopfrechnen:

$56+97=56+(100-3)=56+100-3$

$=156-3=153$.

4. Soll man von 15 die Differenz der Zahlen 7 und 5 abziehen, so schreibt man

$$15-(7-5).$$

Würde man, statt einfach die Differenz $7-5=2$ zu subtrahieren, zunächst 7 subtrahieren, so wäre das Resultat um 5 zu klein, da man nicht 7, sondern nur die um 5 kleinere Zahl subtrahieren sollte. Man muß also, um das richtige Resultat zu bekommen, zu der erhaltenen Differenz noch 5 addieren.

Diese Betrachtung führt zu dem

Lehrsatz über die Subtraktion einer Differenz. Statt eine Differenz zu subtrahieren, darf man den Minuendus subtrahieren und den Subtrahendus addieren.

Formel: $a-(b-c)=a-b+c$.

Beispiel: $48a-(12a-19b)+(4a-9b)=$

$48a-12a+19b+4a-9b=40a+10b$.

Anwendung beim Kopfrechnen:

$276-189=276-(200-11)$

$=276-200+11=76+11=87$.

§ 6. Die Umkehrung einer Rechnungsart. Die Subtraktion als Umkehrung der Addition.

Erklärung: Eine Rechnungsart umkehren heißt aus der in ihr gesuchten Zahl und einer der gegebenen Zahlen die andere gegebene Zahl bestimmen.

Bei der Addition sind zwei Zahlen, die Summanden, gegeben, und es wird die Summe dieser Zahlen gesucht. Nach der oben gegebenen Erklärung hat man es also mit einer Umkehrung der Addition zu tun, wenn man die Aufgabe stellt, aus der gegebenen Summe a zweier Zahlen und der einen dieser beiden Zahlen b die andere der beiden Zahlen zu ermitteln. Man sieht leicht, daß die in diesem Falle gesuchte Zahl gefunden wird, wenn man b von a subtrahiert, daß sie also gleich $(a-b)$ ist. Wenn man also die Zahl b von der Zahl a subtrahiert, so findet man in $a-b$ diejenige Zahl, welche zu b addiert a als Summe ergibt. Es kann demnach die Subtraktion als Umkehrung der Addition aufgefaßt und für sie die folgende Erklärung gegeben werden.

Erklärung: Die Zahl b von der Zahl a subtrahieren bedeutet diejenige Zahl bestimmen, welche zu b addiert a als Summe gibt.

Auf dieser Erklärung beruht die jetzt vielfach gebrauchte sogenannte österreichische Methode der Subtraktion oder die additive Subtraktion.

Die Addition besitzt nur diese eine Umkehrung, da es wegen des Kommutationsgesetzes gleichgültig ist, ob man außer der Summe den einen oder den anderen Summanden als gegeben betrachtet.

§ 7. Erste Erweiterung des Zahlengebietes. Die negativen Zahlen.

Die Addition zweier beliebig gegebenen Zahlen ist stets ausführbar, da ja die Zahlenreihe nach oben unbegrenzt ist. Nicht so ist es mit der Subtraktion. Eine Subtraktionsaufgabe ist unlösbar, d. h. es gibt unter den natürlichen Zahlen keine, welche der Forderung der Aufgabe genügt, wenn der Minuendus kleiner ist als der Subtrahendus. Soll man z. B. von der Zahl 5 die Zahl 8 subtrahieren, also die Differenz (5 — 8) bilden, so kann man zunächst 5 mal die Eins von der gegebenen Zahl 5 abziehen, dann aber stößt man auf Null und damit auf die untere Grenze der natürlichen Zahlenreihe. Um die Aufgabe zu lösen, hätte man nun aber noch 3 mal eine Eins zu subtrahieren, und dies ist nicht ausführbar. Denken wir uns aber die Zahlenreihe versinnlicht durch eine Zeichnung wie Fig. 1 und stellen wir uns die Subtraktion der Zahl 8 von 5 als ein Rückwärtsgehen von der Zahl 5 aus nach links um 8 Einheitsstrecken vor, so finden wir, wenigstens auf der Geraden, da dieselbe ja nach beiden Seiten unbegrenzt ist, eine Stelle, auf der wir halt zu machen hätten, wenn wir die 8 Schritte von der durch 5 bezeichneten Stelle aus rückwärts gemacht haben. Sie liegt 3 Einheiten links von Null. Will man nun unsere Aufgabe, 8 von 5 zu subtrahieren, nicht zu den unlösbaren zählen, so muß man das Gebiet der Zahlen über die bisherige untere Grenze „die Null" hinaus erweitern. Dies ist geschehen durch **Einführung der negativen Zahlen.**

Sie werden, da

$$5 - 8 = 5 - (5 + 3) = 5 - 5 - 3 \ (\S\ 5,\ 2) = -3 \text{ ist,}$$

durch ein vor die natürliche Zahl gesetztes Subtraktionszeichen, ein „Minuszeichen" kenntlich gemacht (bezeichnet). Man bekommt auf diese Weise die neuen Zahlen — 1, — 2, — 3, . . . (gesprochen „minus 1, minus 2, minus 3, . . ."), welche man die negativen Zahlen nennt. Das vorgesetzte Minuszeichen macht sie kenntlich als Zahlen, die kleiner als Null sind. Die hinter dem Minuszeichen stehende natürliche Zahl gibt an, um wieviel Einheiten die Zahl kleiner als Null ist. Es folgt daraus, daß die negative Zahl um so kleiner ist, je größer die auf das Minuszeichen folgende Zahl ist. Die Zahl — 1000 ist kleiner als — 4.

Löst man eine Subtraktionsaufgabe, die mit den natürlichen Zahlen

noch ausführbar ist, z. B. die Aufgabe, 5 von 8 zu subtrahieren, ähnlich wie die obige Aufgabe, so kann man schreiben

$$8 - 5 = 8 - (8 - 3) = 8 - 8 + 3 \ (\S\ 5,\ 4) = + 3.$$

Man versieht daher nach Einführung der negativen Zahlen die Zahlen der natürlichen Zahlenreihe zum Unterschiede mit einem vor die Zahl gesetzten Additionszeichen, einem „Pluszeichen", und nennt sie positive Zahlen. Auf diese Weise bekommt man die Zahlen + 1, + 2, + 3, ... (gesprochen „plus 1, plus 2, plus 3, ..."). Das vorgesetzte Pluszeichen macht sie kenntlich als Zahlen, die größer als Null sind. Die positiven und die negativen Zahlen heißen mit gemeinschaftlichem Namen algebraische Zahlen. Die Minuszeichen und Pluszeichen bei den algebraischen Zahlen führen den gemeinsamen Namen „Vorzeichen" und sind als solche von den gleichgeschriebenen Rechnungszeichen wohl zu unterscheiden. Zuweilen pflegt man das eine Vorzeichen als das entgegengesetzte des anderen zu bezeichnen.

Die hinter dem Vorzeichen der algebraischen Zahlen stehenden natürlichen Zahlen nennt man die absoluten Werte der algebraischen Zahlen.

Durch die Einführung der algebraischen Zahlen bekommen wir eine nach oben und unten unbegrenzte, oder, wie man auch zu sagen pflegt, sich bis in das Unendliche erstreckende Zahlenreihe (Fig. 2).

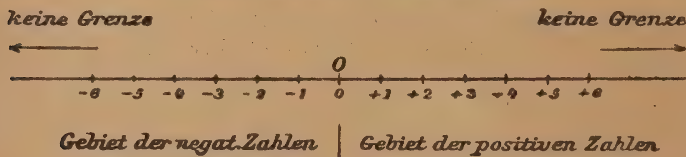


Fig. 2.

Für „unendlich" gebraucht man in der Mathematik das Zeichen ∞ (wahrscheinlich aus dem lateinischen ↀ [M] entstanden). Man kann demnach sagen: die natürlichen Zahlen erstrecken sich von 0 bis ∞, die algebraischen Zahlen von $-\infty$ bis $+\infty$. Die untere Grenze der natürlichen Zahlen, die Null, bildet die Grenze zwischen dem Gebiete der negativen und positiven Zahlen.

Zwei positive oder zwei negative Zahlen lassen sich ebensogut wie zwei absolute (natürliche) Zahlen zu einer Zahl zusammenfassen, nur darf man nicht vergessen, der neuen Zahl das Vorzeichen derjenigen Zahlen zu geben, deren Summe sie darstellt.

Man pflegt beim Schreiben die zu vereinigenden Zahlen unmittel-

bar nebeneinander zu setzen. (Der Grund hierfür findet sich in § 8.) Es ist + 5 + 7 = + 12 (gesprochen: „plus 5 und plus 7 sind plus 12“). − 3 − 8 = − 11 (gesprochen: „minus 3 und minus 8 sind minus 11“).

Selbstverständlich ist hiernach, daß man z. B. für + 18 auch schreiben kann + 10 + 8 oder + 11 + 7 usw., ebenso daß man für − 9 setzen kann − 5 − 4 oder − 3 − 6 usw.

Besitzen die Zahlen, die man vereinigen soll, verschiedene Vorzeichen, aber denselben absoluten Wert, so ist das Ergebnis stets Null.

$$-8+8=0;\ +3-3=0.$$

Nun ist es auch leicht einzusehen, wie Zahlen mit verschiedenen Vorzeichen und verschiedenen absoluten Werten vereinigt werden können. Man hat nur nötig, diejenige der beiden Zahlen, welche den größeren absoluten Wert besitzt, so in zwei Summanden zu zerlegen, daß der absolute Wert des einen Summanden gleich dem absoluten Wert der anderen Zahl ist. Dieser eine Summand muß dann mit der zweiten Zahl sich zu Null vereinigen, und es bleibt als Ergebnis eine Zahl, deren absoluter Wert gleich der Differenz der absoluten Werte der gegebenen Zahlen ist, und deren Vorzeichen gleich dem Vorzeichen der größeren der gegebenen Zahlen ist.

$$-6+17=-6+6+11=+11$$
$$-14+8=-6-8+8=-6.$$

Regel: Zahlen mit demselben Vorzeichen vereinigt man, indem man der Summe ihrer absoluten Werte das gemeinsame Vorzeichen gibt; Zahlen mit verschiedenem Vorzeichen vereinigt man, indem man der Differenz ihrer absoluten Werte das Vorzeichen der größeren gibt.

§ 8. Addition und Subtraktion algebraischer Zahlen.

Wollen wir uns das Addieren und Subtrahieren algebraischer Zahlen klar machen, so müssen wir uns erinnern, daß, solange wir es mit den natürlichen Zahlen (den Zahlen ohne Vorzeichen, den absoluten Zahlen) zu tun hatten, das Addieren nichts weiter war als ein Vorwärtszählen mit der absoluten Einheit 1, das Subtrahieren ein Rückwärtszählen. Das Addieren war ein Wandern in der Zahlenreihe nach rechts oder oben, das Subtrahieren ein Wandern nach links oder unten. Durch Einführung der algebraischen Zahlen sind zwei neue Einheiten entstanden: die positive Einheit + 1 und die negative Einheit − 1.

Will man mit diesen Einheiten zählen, so ist folgendes zu beachten. Zählt man von Null aus mit der positiven Einheit vorwärts oder rückwärts, so gelangt man stets zu denselben Stellen, als wenn man mit der absoluten Einheit dasselbe ausgeführt hätte. Das Zählen mit der positiven Einheit und daher auch das Addieren und Subtrahieren positiver Zahlen ist also ganz dasselbe wie das Addieren und Subtrahieren absoluter Zahlen. Wir haben also die

Regel: Statt eine positive Zahl zu addieren oder zu subtrahieren, kann man ihren absoluten Wert addieren oder subtrahieren.

Formel: $a + (+b) = a + b$

$a - (+b) = a - b.$

Anders gestaltet sich die Sache, wenn wir mit der negativen Einheit von Null aus vorwärts oder rückwärts zählen. Zählen wir vorwärts, d. h. fügen wir zu Null -1 hinzu, so kommen wir auf dieselbe Zahl, auf die wir gestoßen wären, wenn wir von Null aus mit der absoluten Einheit rückwärts gezählt hätten. Zählen wir rückwärts, so gelangen wir demnach in das Gebiet der positiven Zahlen, d. h. das Rückwärtszählen mit der negativen Einheit führt uns zu derselben Stelle, als wenn wir mit der absoluten Einheit vorwärts gezählt hätten. Es entspricht also der Addition einer negativen Zahl die Subtraktion der zugehörigen absoluten Zahl, und der Subtraktion der negativen Zahl entspricht die Addition der absoluten.

Regel: Statt eine negative Zahl zu addieren, kann man ihren absoluten Wert subtrahieren, und statt eine negative Zahl zu subtrahieren, kann man ihren absoluten Wert addieren.

Formel: $a + (-b) = a - b$

$a - (-b) = a + b.$

Die letzte dieser beiden Formeln ist wohl am schwersten verständlich und soll daher noch in anderer Weise erklärt werden. Vielfach benutzt man zur Erleichterung des Verständnisses für das Rechnen mit algebraischen Zahlen den Vermögensbestand einer Person, deren wirklichen Besitz man als positiv und deren Schulden man als negativ betrachtet.

Nehmen wir an, jemand habe in seinem Besitz 8000 ℳ in barem Gelde (+ 8000 ℳ), er habe außerdem 3000 ℳ Schulden (− 3000 ℳ), dann beträgt sein Vermögen + 8000 ℳ − 3000 ℳ = + 5000 ℳ. Vermindern sich nun seine Schulden etwa dadurch, daß ihm dieselben

erlassen werden, um 2000 ℳ, betragen sie also nur noch 1000 ℳ, so beträgt sein Vermögen + 8000 ℳ − 1000 ℳ = + 7000 ℳ. Dadurch also, daß von seinem aus barem Gelde und Schulden sich zusammensetzenden Vermögensbestande von + 5000 ℳ die 2000 ℳ Schulden (− 2000 ℳ) fortgenommen sind, was wir dadurch ausdrücken können, daß wir schreiben

$$+ 5000 \text{ℳ} - (- 2000 \text{ℳ}),$$

ist der Vermögensbestand auf + 7000 ℳ angewachsen. Es sind also + 5000 ℳ − (− 2000 ℳ) = + 5000 ℳ + 2000 ℳ = + 7000 ℳ.

Beispiele:

1. Soll man + 7 von − 8 abziehen, so erhält man
$$- 8 - (+ 7) = - 8 - 7 = - 15.$$
2. Soll man − 30 von − 5 abziehen, so erhält man
$$- 5 - (- 30) = - 5 + 30 = + 25.$$
3. Soll man − 8 von − 10 abziehen, so erhält man
$$- 10 - (- 8) = - 10 + 8 = - 2.$$
4. Soll man + 7 von + 3 abziehen, so erhält man
$$+ 3 - (+ 7) = + 3 - 7 = - 4.$$

§ 9. Die algebraische Summe.

Hat man eine Summe irgendwelcher algebraischer Zahlen, etwa

$$(+ a) + (- b) + (- c) + (+ d),$$

und man führt die geforderten Additionen nach den Regeln des § 8 aus, so erhält man

$$+ a - b - c + d,$$

wofür man gewöhnlich $a - b - c + d$ schreibt, da man übereingekommen ist, das Vorzeichen am Anfang, falls es ein Pluszeichen ist, nicht zu schreiben.

Man kann sich daher einen aus positiven und negativen Zahlen zusammengesetzten Ausdruck wie

$$a + b - c - d$$

entstanden denken aus der Summe algebraischer Zahlen

$$(+ a) + (+ b) + (- c) + (- d).$$

Dies führt zu der

Erklärung: Einen aus positiven und negativen Zahlen zusammengesetzten Ausdruck nennt man **eine algebraische Summe.**

Man hat hierbei wohl zu beachten, daß die in der algebraischen Summe stehenden Zeichen Vorzeichen sind, nicht Rechnungszeichen. Das Rechnungszeichen + ist stets fortgelassen.

Die Einführung der algebraischen Summe gestattet es nun, Summe und Differenz unter einem gemeinsamen Gesichtspunkte zu betrachten. Die Summe $a + b$ ist die algebraische Summe $(+a) + (+b)$, und die Differenz $a - b$ ist die algebraische Summe $(+a) + (-b)$. Nun gilt auch das Kommutationsgesetz für die Differenz, doch nicht in dem Sinne, daß man einfach die absoluten Zahlen miteinander vertauschen darf, sondern man kann die algebraischen Zahlen d. h. die Zahlen mit ihrem Vorzeichen vertauschen. Es ist

$$a - b = - b + a.$$

Im weiteren Sinne gilt ganz allgemein

das Kommutationsgesetz für die algebraische Summe: Der Wert einer algebraischen Summe ist unabhängig von der Folge der Summanden.

$$a + b - c = a - c + b = b + a - c$$
$$= b - c + a = - c + a + b = - c + b + a.$$

Eine weitere Vereinfachung durch die Einführung der algebraischen Summe ist nun die, daß man die vier Lehrsätze aus § 4 und § 5, welche von der Addition und Subtraktion von Summe und Differenz handeln, in die folgenden zwei Lehrsätze zusammenfassen kann:

Lehrsatz I. Statt eine algebraische Summe zu addieren, darf man die einzelnen Summanden in beliebiger Folge addieren:

Formel: $a + (b - c + d) = a + b - c + d.$

Lehrsatz II. Statt eine algebraische Summe zu subtrahieren, darf man die einzelnen Summanden in beliebiger Folge subtrahieren.

Formel: $a - (b - c + d) = a - b + c - d.$

Bemerkung: Führt man wie in den beiden obigen Formeln die Additionen und Subtraktionen algebraischer Summen aus, so pflegt man zu sagen: man löse die Klammern auf. Nach wiederholtem Auflösen der Klammern mit Anwendung der vorher angegebenen Lehrsätze findet man als

Praktische Regel für das Auflösen von Klammern: Eine Klammer, vor der ein Pluszeichen steht, wird aufgelöst, indem man die Klammer einfach fortläßt.

Eine Klammer, vor der ein Minuszeichen steht, wird aufgelöst, indem man die Klammer mit dem Minuszeichen fortläßt und die in der Klammer stehenden Summanden mit entgegengesetzten Vorzeichen hinschreibt.

Beispiele für das Auflösen von Klammern:

1. $25a - (12a - 17b + 3c) + (7a + 3b - 8c) + 11c$

$= 25a - 12a + 17b - 3c + 7a + 3b - 8c + 11c$

$= 20a + 20b.$

2. $30x - [5x - (8x - 11y) + 3y] + (17y - 2x) =$

In dieser Aufgabe kommen zwei Arten von Klammern vor. Die eine Art, welche wie die bisherigen Klammern geschrieben ist, nennt man „runde Klammer", die andere, zum ersten Male hier auftretende, „eckige Klammer". Man löst beide Klammern am besten in der Weise auf, daß man zuerst die runden Klammern und dann in einer neuen Zeile die eckigen Klammern auflöst.

Die Auflösung gestaltet sich also folgendermaßen:

$30x - [5x - 8x + 11y + 3y] + 17y - 2x =$

$30x - 5x + 8x - 11y - 3y + 17y - 2x = 31x + 3y.$

3. $-18a - \{11a - [-20b + (4a - 10b) + 3a] - 9b\} - b =$

Die in dieser Aufgabe neu auftretende Klammer wird „geschweifte Klammer" genannt. Sie wird zuletzt aufgelöst.

$-18a - \{11a - [-20b + 4a - 10b + 3a] - 9b\} - b =$

$-18a - \{11a + 20b - 4a + 10b - 3a - 9b\} - b =$

$-18a - 11a - 20b + 4a - 10b + 3a + 9b - b =$

$-22a - 22b.$

Weitere Beispiele.

1. $36a - (15a - 21b) - (10a - 9b) + 19a$; $(30a + 30b)$.
2. $25a - [17b - (3a - 8b) + 2a] - (9a - 25b)$; $(17a)$.
3. $6a - [-(3b - 10a) - (3a + 7b)] + a$; $(10b)$.

§ 10. Die Gleichungen.

Erklärung: Eine Gleichung ist ein in der arithmetischen Zeichensprache niedergeschriebener Satz, welcher aussagt, daß zwei Größen einander gleich sind (§ 2).

Jede Gleichung, die für alle Werte der in ihr vorkommenden Buchstabengrößen richtig bleibt, heißt eine identische Gleichung.

Zu ihnen gehören erstens Gleichungen von der Form $a = a$, $b + c = b + c$, zweitens alle Formeln.

Ist eine Gleichung nicht für alle Werte der in ihr vorkommenden Buchstabengrößen richtig, wie z. B. $x + 7 = 10$, so kann man stets für eine in der Gleichung vorkommende Buchstabengröße einen Wert ermitteln, welcher für sie eingesetzt die Gleichung zu einer identischen macht. Eine derartige Gleichung bestimmt also stets den Wert einer in derselben vorkommenden Größe und heißt daher eine Bestimmungsgleichung. Die durch die Gleichung bestimmte Größe, welche man gewöhnlich durch einen der letzten Buchstaben des Alphabets x, y, z bezeichnet[1]), heißt die Unbekannte. Derjenige Wert der Unbekannten, für welchen die Gleichung zu einer identischen wird, heißt die Wurzel der Gleichung. Eine Gleichung lösen heißt die Wurzel der Gleichung bestimmen.

Die Lösung der Gleichung geschieht durch Anwendung der Grundsätze (§ 3).

Beispiel 1. Ist die oben angeführte Gleichung $x + 7 = 10$ zu lösen, so sieht man, daß die Lösung erfolgt ist, wenn x auf der linken Seite der Gleichung allein steht ohne die 7. Um die 7 von der linken Seite fortzuschaffen, nimmt man die identische Gleichung $+ 7 = + 7$ zur Hilfe. Man hat dann die beiden Gleichungen

$$\begin{array}{r} x + 7 = 10 \\ + 7 = + 7 \\ \hline \end{array}$$

Wendet man nun den Grundsatz an: Gleiches von Gleichem subtrahiert gibt gleiche Differenzen, so folgt:

$$x = 10 - 7;\ \mathbf{x = 3.}$$

Man könnte auch die identische Gleichung $- 7 = - 7$ zur Hilfe nehmen. Dann hat man die beiden Gleichungen

$$\begin{array}{r} x + 7 = 10 \\ - 7 = - 7 \\ \hline \end{array}$$

Wendet man nun den Grundsatz an: Gleiches zu Gleichem addiert gibt gleiche Summen, so folgt:

$$x = 10 - 7;\ \mathbf{x = 3.}$$

1) Sind mehr als 3 Unbekannte zu bezeichnen, so pflegt man zur Bezeichnung die dem x, y, z vorhergehenden 3 Buchstaben in der Folge, wie sie im Alphabet stehen, also u, v, w, zu verwenden.

Beispiel 2. Ist die Gleichung $x - 7 = 10$ zu lösen, und nimmt man die identische Gleichung $+ 7 = + 7$ hinzu, so hat man dann die beiden Gleichungen

$$x - 7 = 10$$
$$+ 7 = + 7.$$

Aus diesen folgt durch Anwendung des Grundsatzes § 3, V a

$$x = 10 + 7; \; x = 17.$$

Beide Beispiele lehren, daß man, ohne die identische Gleichung jedesmal hinzuschreiben, die Lösung ausführen kann durch Anwendung der

Regel: Man kann jedes Glied der einen Seite einer Gleichung auf die andere Seite der Gleichung setzen, ohne daß die Gleichung falsch wird, wenn man gleichzeitig das Vorzeichen des Gliedes in das entgegengesetzte verwandelt

Einige Beispiele mögen dies Verfahren erläutern.

1. $17x - 6 - 9x = 20 + 7x - 12.$

Zunächst werden die Glieder, welche x enthalten, auf die linke Seite geschafft und die Glieder ohne x auf die rechte Seite.

$$17x - 9x - 7x = 20 - 12 + 6.$$

Hierauf werden auf jeder Seite sämtliche Glieder zu einem Gliede vereinigt.

$$x = 14.$$

2. $3x + 8 - 11x - 4 = - 14x + 28$

$$3x - 11x + 14x = 28 - 8 + 4$$
$$6x = 24; \; x = 4.$$

3. $12 - (3 - 14x) + 2x = 8x - (2x + 7) + 36.$

Stehen in einer Gleichung Klammern, so müssen diese zunächst aufgelöst werden.

$$12 - 3 + 14x + 2x = 8x - 2x - 7 + 36$$
$$14x + 2x - 8x + 2x = - 7 + 36 - 12 + 3$$
$$10x = 20; \; x = 2.$$

Bemerkung. Man kann nach Lösung einer Gleichung stets die **Probe** machen, ob man richtig gerechnet hat. Hierbei verfährt man folgendermaßen. Den für die Unbekannte x gefundenen Wert setzt man für x in die gegebene Gleichung ein. Erhält man dann auf beiden Seiten nach Vereinigung der Zahlen dasselbe Resultat, so ist die Lösung richtig. Will man z. B. in der letzten der vorher gelösten Gleichungen die Probe machen, so ersetzt man in der gegebenen Gleichung x durch 2.

Man erhält:

$$12 - (3 - 28) + 4 = 16 - (4 + 7) + 36$$
$$12 - 3 + 28 + 4 = 16 - 4 - 7 + 36$$
$$41 = 41.$$

Die Lösung ist also richtig.

Man hüte sich, den für x gefundenen Wert in eine der aus der gegebenen Gleichung hergeleiteten Gleichungen einzusetzen. Eine identische Gleichung am Schlusse der Probe würde dann nur zeigen, daß man von der Gleichung aus, in welche man einsetzte, richtig gerechnet hat, aber keinen Beweis dafür liefern, daß von Anfang an die Lösung eine richtige war.

Weitere Beispiele.

1. $7x + 10 - 4x = 27 + 2x - 7$; $(x = 10)$.
2. $15x - (7x + 3) - 5 = 32 - (3x - 4)$; $(x = 4)$.
3. $7 - (5x - 17) + 2x = 31 - (2x + 5) - 3x$; $(x = 1)$.

§ 11. Die Multiplikation.

1. Besteht eine Summe aus lauter gleichen Summanden, hat man z. B. die Summe $4 + 4 + 4 + 4 + 4$, so pflegt man, was besonders bei einer großen Anzahl von Summanden von wesentlichem Vorteil ist, den wiederholten Summanden nur einmal zu schreiben und davor, durch einen Punkt von dem Summanden getrennt, die Zahl, die angibt, wie oft der Summand in der Summe vorkommt. Statt obiger Summe schreibt man also $5 \cdot 4$, gesprochen „5 mal 4". Man sagt, die Zahl 4 sei mit der Zahl 5 multipliziert und nennt den Ausdruck $5 \cdot 4$ ein **Produkt.** Ein Produkt ist also eine Summe gleicher Summanden.

Erklärung: Eine Zahl b mit einer Zahl a multiplizieren bedeutet, b so oft addieren, wie die Zahl a angibt.

Es ist $\quad a \cdot b = b + b + b + \cdots$ (a Summanden).

Gesprochen wird dies: „a mal b gleich $b + b + b$ + Punkte."

Der wiederholte Summand b heißt der Multiplikandus, die Zahl a, welche angibt, wie oft der Multiplikandus zu addieren ist, heißt Multiplikator.

Multipliziert man eine beliebige Zahl der Reihe nach mit den aufeinander folgenden Zahlen der natürlichen Zahlenreihe, so erhält man als Produkte diejenigen Zahlen, auf die man auch gekommen wäre, wenn man mit dem Multiplikandus als Einheit vorwärts gezählt hätte.

Das Multiplizieren ist also tatsächlich nur ein Zählen nach einer beliebig gewählten Einheit, die durch den Multiplikandus angegeben wird. Es umfaßt also auch unser gewöhnliches Zählen, wenn der Multiplikandus 1 ist. Die Resultate, die wir angeben, wenn wir z. B. das Einmaleins mit der 5 aufsagen, sind weiter nichts als die Zahlen, auf die wir kommen würden, wenn wir von Null an mit der 5 als Einheit vorwärts zählen würden.

Der Punkt als Rechnungszeichen für die Multiplikation kommt zuerst bei Leibniz in der zweiten Hälfte des 17. Jahrhunderts vor; das statt des Punktes zuweilen noch gebrauchte Zeichen $\times$ ist älter und kam ungefähr im Anfang des 17. Jahrhunderts auf.

Kann ein Irrtum durch Weglassung des Punktes nicht stattfinden, wie es der Fall sein würde, wenn man statt $5 \cdot 4$ schreiben würde 54, so pflegt man vielfach den Punkt fortzulassen Statt $a \cdot b$ schreibt man ab, statt $3 \cdot a$ auch $3a$. Für a kann man auch $1a$ schreiben.

Die oben gegebene Erklärung des Produktes macht es ohne weiteres klar, daß die als der Multiplikator bezeichnete Zahl stets eine unbenannte absolute Zahl (eine natürliche Zahl) sein muß, während der Multiplikandus sowohl eine benannte wie eine unbenannte, absolute oder algebraische Zahl sein darf.

Ein Produkt, in welchem Multiplikator und Multiplikandus unbenannte Zahlen sind, heißt ein Zahlenprodukt. Nur für dieses gilt

das Kommutationsgesetz: In jedem Zahlenprodukt kann man, ohne den Wert des Produktes zu ändern, den Multiplikator und den Multiplikandus miteinander vertauschen.

Beweis. Es ist

$$a \cdot b = b + b + b + \cdots (a \text{ Summanden}).$$

Nimmt man rechts von jedem b eine Eins fort, so erhält man a Einsen oder, wenn man sie addiert, die Zahl a. Nimmt man noch einmal von jedem b eine Eins fort, so erhält man wieder die Zahl a. Dies Verfahren kann man so oft wiederholen, als in der Zahl b Einsen enthalten sind, d. h. $b$mal. Es läßt sich demnach das Produkt $a \cdot b$ auch darstellen als eine Summe von b Summanden, deren jeder gleich a ist.

Man erhält also:

$$a \cdot b = a + a + a + \cdots (b \text{ Summanden})$$

oder $a \cdot b = b \cdot a$.

Wegen dieses Gesetzes führen in einem Zahlenprodukte Multiplikator und Multiplikandus auch den gemeinschaftlichen Namen Faktoren.

Für die Multiplikation gelten die folgenden Lehrsätze:

2. Lehrsatz über die Multiplikation einer Summe. Statt eine algebraische Summe zu multiplizieren, kann man **jeden** Summanden einzeln multiplizieren und die erhaltenen Produkte je nach ihrem Vorzeichen addieren oder subtrahieren.

Formel: $a \cdot (b + c - d) = ab + ac - ad.$

Beweis: Der Beweis sei für den Fall durchgeführt, daß der Multiplikator die Zahl 3 ist. Für jede andere Zahl ließe er sich in ähnlicher Weise führen. Nach der Erklärung des Produktes ist

$$\begin{aligned} 3 \cdot (b + c - d) &= (b + c - d) + (b + c - d) + (b + c - d) \\ &= b + c - d + b + c - d + b + c - d \\ &= b + b + b + c + c + c - d - d - d \quad (\S\ 9) \\ &= 3b + 3c - 3d. \end{aligned}$$

3. Lehrsatz über die Multiplikation eines Produktes. Statt ein Produkt zu multiplizieren, darf man **nur einen** Faktor multiplizieren und das erhaltene Produkt mit dem anderen Faktor multiplizieren.

Formel: $a \cdot (bc) = (ab) \cdot c = (ac) \cdot b.$

Beweis: Der Beweis sei wieder nur für den Fall, daß der Multiplikator 3 ist, durchgeführt. Es ist

$$\begin{aligned} 3 \cdot (ab) &= 3 \cdot (a + a + a + \cdots [b \text{ Summanden}]) \\ &= 3a + 3a + 3a + \cdots [b \text{ Summanden}] \\ &= b \cdot 3a, \text{ oder nach 1. } 3ab. \end{aligned}$$

Beispiele: 1. $3a \cdot 4b = 3 \cdot a \cdot 4 \cdot b = 3 \cdot 4 \cdot a \cdot b = 12ab.$

2. $3x \cdot (4y + 2z + 5u) = 12xy + 6xz + 15xu.$

3. $5a \cdot (7b - 3c + 8d) = 35ab - 15ac + 40ad.$

4. Lehrsatz: Ist ein Faktor eines Produktes gleich Null, so ist das Produkt gleich Null.

Lehrsatz: Ist ein Produkt zweier Faktoren gleich Null, so ist einer der Faktoren gleich Null, oder beide sind gleich Null.

§ 12. Der algebraische Multiplikator.

Die Aufgabe $20a + 3 \cdot (4a - 5b + 2c)$ verlangt, man solle zu $20a$ das Produkt $3 \cdot (4a - 5b + 2c)$ addieren.

Man wird die Aufgabe lösen, indem man zuerst das Produkt ausrechnet und dann das Ergebnis zu $20a$ addiert.

$$20a + 3 \cdot (4a - 5b + 2c) = 20a + (12a - 15b + 6c)$$
$$= 20a + 12a - 15b + 6c$$
$$= 32a - 15b + 6c.$$

Die Aufgabe $20a - 3 \cdot (4a - 5b + 2c)$ verlangt, man solle von $20a$ das Produkt $3 \cdot (4a - 5b + 2c)$ subtrahieren. Man wird die Aufgabe lösen, indem man zuerst das Produkt ausrechnet und dann das Ergebnis von $20a$ subtrahiert.

$$20a - 3 \cdot (4a - 5b + 2c) = 20a - (12a - 15b + 6c)$$
$$= 20a - 12a + 15b - 6c$$
$$= 8a + 15b - 6c.$$

Will man die Multiplikation mit der absoluten Zahl und die darauffolgende Addition oder Subtraktion mit einem Male ausführen, so kann man sich dadurch helfen, daß man im Gegensatze zu der Erklärung in § 11, 1 gestattet, daß der Multiplikator auch eine algebraische Zahl sein könne. Es ist dann aber das Folgende festzusetzen:

Mit einer positiven Zahl multiplizieren bedeutet mit der absoluten Zahl multiplizieren und das Produkt addieren.

Mit einer negativen Zahl multiplizieren bedeutet mit der absoluten Zahl multiplizieren und das Produkt subtrahieren.

Da die Multiplikation mit der absoluten Zahl die Vorzeichen in der algebraischen Summe nicht ändert, und auch bei der Addition der Summe die Vorzeichen nicht geändert werden, so muß man für den positiven Multiplikator die Regel aufstellen, daß man ein positives Produkt erhält, wenn auch der Multiplikandus positiv ist, ein negatives dagegen, wenn der Multiplikandus negativ ist. Da bei der Subtraktion die Vorzeichen der algebraischen Summe in die entgegengesetzten verwandelt werden, so gilt für den negativen Multiplikator die Regel, daß man ein negatives Produkt erhält, wenn der Multiplikandus positiv ist, ein positives dagegen, wenn auch der Multiplikandus negativ ist. Es läßt sich dies zusammenfassen in folgende, leicht zu behaltende

Regel: Zwei Zahlen mit denselben Vorzeichen geben ein positives Produkt, zwei Zahlen mit verschiedenen Vorzeichen geben ein negatives Produkt.

$$(+a) \cdot (+b) = +ab; \quad (-a) \cdot (+b) = -ab$$
$$(+a) \cdot (-b) = -ab; \quad (-a) \cdot (-b) = +ab$$

Beispiele:

1. $20a - 3 \cdot (5a - 7b) + 4 \cdot (3a - 10b) =$
$20a - 15a + 21b + 12a - 40b = 17a - 19b.$

2. $11a - 2 \cdot [-4a + 3 \cdot (6a - 5b) - 2b] + 17a =$
$11a - 2[-4a + 18a - 15b - 2b] + 17a =$
$11a + 8a - 36a + 30b + 4b + 17a = 34b.$

Anwendung bei Gleichungen.

3. $15 - 3(2 - 4x) = 3x + 2(x - 5) + 40$
$15 - 6 + 12x = 3x + 2x - 10 + 40$
$12x - 3x - 2x = -10 + 40 - 15 + 6$
$7x = 21; \; x = 3.$

4. $5x - 3[2x - 2(7x - 5) - 4] = 2(19x + 10) - 5$
$5x - 3[2x - 14x + 10 - 4] = 38x + 20 - 5$
$5x - 6x + 42x - 30 + 12 = 38x + 20 - 5$
$5x - 6x + 42x - 38x = 20 - 5 + 30 - 12$
$3x = 33; \; x = 11.$

Weitere Beispiele:

1. $15 - 5(12 - 3x) = 15x - 3(2x - 7); \; (x = 11).$
2. $5x + 7(x - 3) - 4(2x - 5) = 39; \; (x = 10).$
3. $27x - 2[3x - 5(2x + 3) - 4] - 3(5x + 6) = 72; \; (x = 2).$

§ 13. Die Potenzierung. (Erster Teil.)

1. Wie aus der Addition die Multiplikation entsteht, wenn man es mit einer Summe gleicher Summanden zu tun hat, so entsteht aus der Multiplikation wieder eine neue Rechnungsart, wenn ein Produkt gleicher Faktoren gegeben ist. Hat man z. B. das Produkt $3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$, so schreibt man den wiederholten Faktor 3 nur einmal und schreibt rechts oben daneben in etwas kleinerer Schrift die Zahl, welche angibt, wie oft der gleiche Faktor sich wiederholt. Statt des obigen Produktes schreibt man also 3^4, gesprochen „3 hoch 4". Man sagt dann, die Zahl 3 sei mit der Zahl 4 potenziert und nennt 3^4 eine **Potenz**. **Eine Potenz ist also ein Produkt aus gleichen Faktoren.**

Erklärung: Eine Zahl a mit einer Zahl n potenzieren bedeutet, ein Produkt von n Faktoren bilden, deren jeder gleich a ist.

Es ist $a^n = a \cdot a \cdot a \cdots$ (n Faktoren).

Der wiederholte Faktor a heißt die **Grundzahl** oder **Basis**, die Zahl n, welche angibt, wie oft der Faktor wiederholt werden soll, heißt **Exponent**.

a^2 wird auch gesprochen „a Quadrat", für a^3 sagt man auch „a Kubus", für a kann man schreiben a^1.

Für die Potenz gilt **kein** Kommutationsgesetz, man kann also Basis und Exponent nicht miteinander vertauschen, mit Ausnahme des einen Falles: $2^4 = 4^2$.

Ist die Grundzahl einer Potenz eine negative Zahl, so ist bei geradem Exponenten die Potenz positiv, bei ungeradem Exponenten negativ.

$$(-2)^2 = (-2) \cdot (-2) = +4$$
$$(-2)^3 = (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) = -8.$$

2. Lehrsatz über die Addition und Subtraktion von Potenzen. **Potenzen können nur dann durch Addition oder Subtraktion zu einem Gliede vereinigt werden, wenn sie in der Grundzahl und im Exponenten übereinstimmen.**

Es ist:

$$a^3 + a^5 = a^3 + a^5;\ a^3 + a^3 = 2a^3;\ 16a^5 - 4a^5 = 12a^5.$$

Beispiel:

$$5a^3 - [2a^2 - (3a^4 + 4a^3) - 7a^4] - 9a^2 =$$
$$5a^3 - [2a^2 - 3a^4 - 4a^3 - 7a^4] - 9a^2 =$$
$$5a^3 - 2a^2 + 3a^4 + 4a^3 + 7a^4 - 9a^2 = 9a^3 - 11a^2 + 10a^4.$$

In dieser Form pflegt man das Ergebnis, wenn es eine Summe von Potenzen derselben Grundzahl enthält, nicht stehen zu lassen. Man **ordnet** dasselbe so, daß man mit der niedrigsten Potenz beginnt und dann stets die nächst höhere Potenz folgen läßt, schreibt also unser Ergebnis $-11a^2 + 9a^3 + 10a^4$ und sagt dann: die Summe ist **nach steigenden Potenzen** von a **geordnet**. Man kann aber auch ebensogut mit der höchsten Potenz beginnen und dann stets die nächst niedrigere Potenz folgen lassen, also unser Ergebnis $10a^4 + 9a^3 - 11a^2$ schreiben. Dann sagt man: die Summe ist **nach fallenden Potenzen** von a **geordnet**.

3. Soll das Produkt zweier Potenzen sich als **eine** Potenz darstellen lassen, so ist es nur notwendig, daß die beiden Potenzen in der Grundzahl übereinstimmen.

Hat man a^3 mit a^4 zu multiplizieren, so ist

$$a^3 \cdot a^4 = \underbrace{a \cdot a \cdot a}_{3\ \text{Faktoren}} \cdot \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot a}_{4\ \text{Faktoren}}$$
$$= \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a}_{3 + 4 = 7\ \text{Faktoren}}.$$
$$= a^7.$$

Es lautet demnach der

Lehrsatz über die Multiplikation der Potenzen. Potenzen von gleicher Grundzahl werden multipliziert, indem man die Exponenten addiert.

Formel: $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$.

Diese Fassung des Lehrsatzes ist wohl die am leichtesten zu merkende. Wollte man ihn ganz korrekt aussprechen, so müßte man sagen: Statt zwei Potenzen von gleicher Grundzahl miteinander zu multiplizieren, darf man die Exponenten addieren und die gemeinsame Grundzahl mit der erhaltenen Summe der Exponenten potenzieren.

Beispiele:

1. $3a^4 \cdot 7a^5 = 3 \cdot 7 \cdot a^4 \cdot a^5$ (§ 11, 1) $= 21a^9$.
2. $5ab^3 \cdot 4a^2b^4 = 5 \cdot 4 \cdot a \cdot a^2 \cdot b^3 \cdot b^4 = 20a^3b^7$.
3. $3a^2bc^3 \cdot 4ab^5c^2 \cdot 2ab^3c^4 = 24a^4b^9c^9$.
4. $3a^2b^4 - 2ab^2(6a^3b^2 - 5ab^2) + 4a^2b\,(3a^2b^3 - 2b^3) =$
   $3a^2b^4 - 12a^4b^4 + 10a^2b^4 + 12a^4b^4 - 8a^2b^4 = 5a^2b^4$.
5. $15a^4b^6 - 4a^2b\,(5a^3b^2 - 6a^2b^5) - 11a^4b^2\,(3ab + 2b^4)$
   $+ 53a^5b^3 = 17a^4b^6$.
6. $3a^5b^7 + 4a^4b^3\,(4b^2 - 3ab^4) - 9a^2b^2\,(2a^2b^3 - a^3b^5)$
   $= -2a^4b^5$.

4. Hat man eine Potenz, deren Grundzahl ein Produkt ist, z. B. $(ab)^3$, so kann man nach der Erklärung der Potenz schreiben

$$(ab)^3 = ab \cdot ab \cdot ab$$
$$= a \cdot a \cdot a \cdot b \cdot b \cdot b \text{ (§ 11, 1)}$$
$$= a^3 \cdot b^3.$$

Durch diese Überlegung findet man den

Lehrsatz über die Potenzierung eines Produktes. Statt ein Produkt zu potenzieren, darf man die Faktoren einzeln

potenzieren und die erhaltenen Potenzen miteinander multiplizieren.

Formel: $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$.

5. Es ist nach der Erklärung der Potenz

$$(a^3)^4 = a^3 \cdot a^3 \cdot a^3 \cdot a^3$$
$$= a^{3+3+3+3} = a^{4 \cdot 3} = a^{12}.$$

Demnach lautet der

Lehrsatz über die Potenzierung einer Potenz. Statt eine Potenz mit einer Zahl zu potenzieren, darf man den Exponenten der Potenz mit dieser Zahl multiplizieren.

Formel: $(a^n)^p = a^{np}$.

Beispiele:

1. $(a^3 \cdot b^2)^4 = (a^3)^4 \cdot (b^2)^4 = a^{12} b^8$. 2. $(3ab^5)^3 = 27 a^3 b^{15}$.
3. $(2a^3b)^3 \cdot (3a^5b^4)^2 = 8a^9b^3 \cdot 9a^{10}b^8 = 72a^{19}b^{11}$.

§ 14. Die Multiplikation zweier algebraischen Summen.

Soll man das Produkt $(a + b - c) \cdot (d - e)$ bilden, so kann man nach § 11, 2 zunächst jeden Summanden der zweiten Summe mit dem Faktor $(a + b - c)$ multiplizieren. Dadurch erhält man

$$(a + b - c) \cdot (d - e) = (a + b - c)\, d - (a + b - c)\, e.$$

Löst man jetzt rechts die Klammern auf, so findet man

$$= ad + bd - cd - ae - be + ce.$$

Hieraus ergibt sich der

Lehrsatz über die Multiplikation zweier Summen. Zwei Summen werden miteinander multipliziert, indem man jeden Summanden der einen Summe mit jedem Summanden der anderen Summe multipliziert und die erhaltenen Produkte addiert.

Beispiel:

$$(3a - 4b + 5c) \cdot (7a - 2b)$$
$$= 21a^2 - 28ab + 35ac - 6ab + 8b^2 - 10bc$$
$$= 21a^2 - 34ab + 35ac + 8b^2 - 10bc.$$

Vielfach erleichtert es, besonders bei der Multiplikation größerer Summen, die Zusammenfassung gleicher Summanden zu dem Endergebnis, wenn man die durch Multiplikation erhaltenen Produkte nicht hintereinander schreibt. Man schreibt die für jeden Summanden des Multi-

plikators erhaltenen Produkte in eine besondere Zeile und setzt dabei diejenigen Produkte, welche gleiche Buchstabenausdrücke enthalten, untereinander, was nach dem Kommutationsgesetz gestattet ist.

Ein Beispiel möge dies klar machen:

$$\begin{array}{l} (2a^2 - 5a^3 + 3a^4) \cdot (3a + 2a^2 - 7a^3) = \\ \hline 6a^3 - 15a^4 + 9a^5 \\ \quad + 4a^4 - 10a^5 + 6a^6 \\ \quad\quad - 14a^5 + 35a^6 - 21a^7 \\ \hline \end{array}$$

Ergebnis: $6a^3 - 11a^4 - 15a^5 + 41a^6 - 21a^7$.

Bei dieser Multiplikation kann es auch geschehen, daß die mit denselben Buchstabengrößen versehenen Produkte sich zu Null vereinigen.

Beispiel:

$$\begin{array}{l} (3a^2 - 2b + 5c^3) \cdot (3a^2 + 2b - 5c^3) = \\ \hline 9a^4 - 6a^2b + 15a^2c^3 \\ \quad + 6a^2b \qquad\qquad - 4b^2 + 10bc^3 \\ \quad\quad - 15a^2c^3 \qquad\qquad + 10bc^3 - 25c^6 \\ \hline \end{array}$$

Ergebnis: $9a^4 - 4b^2 + 20bc^3 - 25c^6$.

Anwendung bei Gleichungen:

1. $6x(x - 3) + 21 = 15 - (3x - 2) \cdot (5 - 2x)$
$6x^2 - 18x + 21 = 15 - (15x - 10 - 6x^2 + 4x)$
$6x^2 - 18x + 21 = 15 - 15x + 10 + 6x^2 - 4x$
$6x^2 - 6x^2 - 18x + 15x + 4x = 15 + 10 - 21$
$x = 4.$
2. $(3x + 2) \cdot (2x - 3) - (x + 4)(6x - 17) = 2$; $(x = 5)$.
3. $17 + (3x - 4)(4x + 5) - (6x - 5)(2x + 3)$
$= 2(9 - 6x)$; $(x = 2)$.

§ 15. Besondere Fälle der Multiplikation zweier Summen.

Multipliziert man $(a + b)$ mit $(a + b)$, so erhält man als Produkt $a^2 + 2ab + b^2$. Da man für $(a + b) \cdot (a + b)$ auch $(a + b)^2$ schreiben kann, so folgt

Formel I. $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.

In Worten: Das Quadrat der Summe zweier Zahlen ist gleich der Summe der Quadrate der beiden Zahlen vermehrt um das doppelte Produkt derselben.

Hiernach kann man bei ähnlichen Aufgaben das Ergebnis sofort niederschreiben.

$(2a + 5b)^2 = 4a^2 + 20ab + 25b^2$.

$(7a^3 + 3a^5)^2 = 49a^6 + 42a^8 + 9a^{10}$.

$(3a^4b + 4a^2b^6)^2 = 9a^8b^2 + 24a^6b^7 + 16a^4b^{12}$.

Die Multiplikation von $(a - b)$ mit $(a - b)$ liefert die

Formel II. $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$.

In Worten: Das Quadrat der Differenz zweier Zahlen ist gleich der Summe der Quadrate der beiden Zahlen vermindert um das doppelte Produkt derselben.

Beispiele: $(7a^3 - 5)^2 = 49a^6 - 70a^3 + 25$.

$(1 - 3ab^2)^2 = 1 - 6ab^2 + 9a^2b^4$.

Multipliziert man $(a + b)$ mit $(a - b)$, so findet man

Formel III. $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$.

In Worten: Das Produkt aus der Summe zweier Zahlen und ihrer Differenz ist gleich der Differenz ihrer Quadrate.

Beispiele: $(3x + 7y)(3x - 7y) = 9x^2 - 49y^2$.

$(a^3 + 1)(a^3 - 1) = a^6 - 1$.

$(2ab^2 + 5a^4)(2ab^2 - 5a^4) = 4a^2b^4 - 25a^8$.

Anwendungen dieser Formeln bei Gleichungen:

1. $(5x + 7)^2 - (3x - 4)^2 = (4x - 5)^2 + 276$.
   $25x^2 + 70x + 49 - 9x^2 + 24x - 16 = 16x^2 - 40x + 25 + 276$.
   $25x^2 - 9x^2 - 16x^2 + 70x + 24x + 40x = 25 + 276 - 49 + 16$.
   $134x = 268$; $x = 2$.
2. $(4x + 3) \cdot (4x - 3) - 28 = (5x - 3)^2 - (3x + 2)^2$.
   $16x^2 - 9 - 28 = 25x^2 - 30x + 9 - 9x^2 - 12x - 4$.
   $42x = 42$; $x = 1$.
3. $(3x - 2)^2 - (2x - 7)^2 = 5x(x - 3) + 79$; $(x = 4)$.
4. $(5x + 7)^2 - (3x - 4)^2 = (4x - 5)^2 - 260$; $(x = -2)$.

§ 16. Die Division.

1. Wie wir aus der Addition durch Umkehrung dieser Rechnungsart die zweite Rechnungsart: die Subtraktion, gefunden haben, so können wir uns auch aus der dritten Rechnungsart, der Multiplikation, durch Umkehrung eine vierte Rechnungsart bilden. Wir können uns die Aufgabe stellen, wenn das Produkt und einer der Faktoren ge-

geben ist, den anderen Faktor zu ermitteln. Die Rechnungsart, welche diese Aufgabe löst, nennt man die **Division**. Ist a das gegebene Produkt und b der gegebene Faktor, so schreibt man die Aufgabe, welche die Ermittlung des anderen Faktors fordert, $\frac{a}{b}$ oder $a:b$, gesprochen „a durch b“, und nennt $\frac{a}{b}$ oder $a:b$ **Quotient**. Das Zeichen „:“ rührt von Leibniz her.

Erklärung: Die Zahl a durch die Zahl b dividieren bedeutet, diejenige Zahl finden, welche mit b multipliziert a als Produkt ergibt.

Das gegebene Produkt a heißt der **Dividendus**, der gegebene Faktor b der **Divisor**.

Nach obiger Erklärung ist

$$12:4 = \frac{12}{4} = 3, \text{ denn } 4 \cdot 3 = 12.$$

Besonders zu merken sind folgende Fälle:

1. $a:1 = \frac{a}{1} = a$, denn $1 \cdot a = a$.
2. $a:a = \frac{a}{a} = 1$, denn $a \cdot 1 = a$.
3. $0:a = \frac{0}{a} = 0$, denn $a \cdot 0 = 0$.
4. $0:0 = \frac{0}{0} =$ jeder beliebigen Zahl, denn jede Zahl gibt mit Null multipliziert Null als Produkt.
5. $a:0 = \frac{a}{0}$ ist unmöglich, denn es gibt keine Zahl, die mit Null multipliziert a als Produkt ergibt.

Bemerkung. Da die Multiplikation nichts anderes ist als eine wiederholte Addition, bei der der eine Faktor der Summand ist, der andere die Zahl, welche angibt, wie oft der Summand addiert werden soll, und das Produkt das Endergebnis sämtlicher Additionen, so kann man die Division als eine **wiederholte Subtraktion** auffassen. Der Dividendus ist die Zahl, von der wiederholt subtrahiert werden soll, der Divisor die Zahl, die subtrahiert werden soll, und der gesuchte Quotient die Zahl, welche angibt, wie oft die Subtraktion ausgeführt werden kann, bis der Dividendus aufgebraucht ist, bis also Null als Rest übrig bleibt.

So ist $\frac{12}{4} = 3$, denn $12 - 4 - 4 - 4 = 12 - 3 \cdot 4 = 0$;
$\frac{a}{1} = a$, denn $a - 1 - 1 - 1 - \cdots$ (a Einsen) $= 0$;
$\frac{a}{a} = 1$, denn $a - a = a - 1 \cdot a = 0$.
$\frac{0}{0}$ ist gleich jeder Zahl, denn wie oft man auch Null von Null abziehen möge, stets ist das Ergebnis dasselbe, nämlich Null.
$\frac{a}{0}$ ist unmöglich, denn man kommt, wie oft man auch Null von a abziehen möge, nie auf Null als Rest.

Auf dieser Auffassung der Division als einer wiederholten Subtraktion beruht die Art, wie wir gewöhnlich zwei Zahlen durcheinander dividieren.

Aus der Erklärung des Quotienten folgt unmittelbar:
Wenn man einen Quotienten mit dem Divisor multipliziert, so erhält man den Dividendus.

$$\frac{a}{b} \cdot b = a,$$

denn $\frac{a}{b}$ ist die Zahl, welche mit b multipliziert a als Produkt ergibt.

Für die Division gelten die folgenden Lehrsätze:

2. Lehrsatz über die Division einer Summe. Statt eine Summe zu dividieren, darf man **jeden** Summanden einzeln dividieren und die erhaltenen Quotienten je nach ihrem Vorzeichen addieren oder subtrahieren.

$$\text{Formel: } (a + b - c) : n = \frac{a}{n} + \frac{b}{n} - \frac{c}{n}.$$

Beweis: $(a + b - c) : n$ bedeutet die Zahl, welche mit n multipliziert $a + b - c$ als Produkt ergibt; nun ist aber $\left(\frac{a}{n} + \frac{b}{n} - \frac{c}{n}\right) \cdot n = \frac{a}{n} \cdot n + \frac{b}{n} \cdot n - \frac{c}{n} \cdot n$ (§ 11, 2) $= a + b - c$ (nach 1), d. h. die rechte Seite der Formel ist gleich der linken.

3. Lehrsatz über die Division eines Produktes. Statt ein Produkt zu dividieren, darf man **nur einen** Faktor dividieren und den erhaltenen Quotienten mit dem anderen Faktor multiplizieren.

$$\text{Formel: } \frac{ab}{c} = \frac{a}{c} \cdot b = \frac{b}{c} \cdot a.$$

Beweis: $\frac{ab}{c}$ bedeutet die Zahl, welche mit c multipliziert $a \cdot b$

als Produkt ergibt; nun ist aber $\left(\frac{a}{c} \cdot b\right) \cdot c = \frac{a}{c} \cdot c \cdot b$ (§ 11, 3) $= a \cdot b$ (nach 1), d. h. die rechte Seite der Formel ist gleich der linken.

4. Wie man Potenzen nur dann durch Multiplikation zu einer Potenz vereinigen kann, wenn sie in der Grundzahl übereinstimmen, so kann man auch zwei Potenzen durch Division nur dann zu einer Potenz zusammenfassen, wenn sie dieselbe Grundzahl besitzen. Die Division erfolgt dann nach dem

Lehrsatz über die Division der Potenzen. Potenzen von gleicher Grundzahl werden durcheinander dividiert, indem man den Exponenten des Divisors von dem Exponenten des Dividendus subtrahiert.

Formel: $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$.

Beweis: $\frac{a^m}{a^n}$ bedeutet die Zahl, welche mit a^n multipliziert a^m als Produkt ergibt; nun ist aber $a^{m-n} \cdot a^n = a^{m-n+n}$ (§ 13, 3) $= a^m$, d. h. die rechte Seite der Formel ist gleich der linken.

5. Die Division algebraischer Zahlen. Bildet man zu den vier Formeln in § 12, welche für die Multiplikation algebraischer Zahlen gelten, die entsprechenden Divisionsaufgaben, so findet man:

$$\frac{+ab}{+a} = +b \qquad \frac{-ab}{-a} = +b$$

$$\frac{-ab}{+a} = -b \qquad \frac{+ab}{-a} = -b.$$

Hieraus ergibt sich die

Regel: Zahlen mit demselben Vorzeichen geben einen positiven Quotienten, Zahlen mit verschiedenen Vorzeichen geben einen negativen Quotienten.

6. Beispiele:

1. $(15a^7 - 35a^8 + 40a^9):(-5a^4) = -3a^3 + 7a^4 - 8a^5$.
2. $(63a^7b^{10} - 21a^5b^{15} - 35a^{11}b^{12}):(-7a^3b^8) =$
   $-9a^4b^2 + 3a^2b^7 + 5a^8b^4$.
3. $10a^2 - [3a^5 - (20a^8 - 28a^7):4a^2 - 5a^6]:a^3 =$
   $10a^2 - [3a^5 - 5a^6 + 7a^5 - 5a^6]:a^3 =$
   $10a^2 - 3a^2 + 5a^3 - 7a^2 + 5a^3 = 10a^3$.

§ 17. Die Division einer Summe durch eine Summe.

Aus jeder ausgerechneten Multiplikationsaufgabe kann man eine Divisionsaufgabe bilden. Hat man die folgende Multiplikationsaufgabe gerechnet:

$$\begin{array}{r}(3x^2 - 4x + 5) \cdot (6x^2 + 7x - 8) \\ \hline 18x^4 - 24x^3 + 30x^2 \qquad\qquad\qquad \\ + 21x^3 - 28x^2 + 35x \qquad\quad \\ - 24x^2 + 32x - 40 \\ \hline 18x^4 - 3x^3 - 22x^2 + 67x - 40\end{array}$$

so kann man daraus die Divisionsaufgabe herleiten:

$$(18x^4 - 3x^3 - 22x^2 + 67x - 40) : (3x^2 - 4x + 5) =$$

Zunächst ist aus dem Multiplikationsschema klar, daß das erste und letzte Glied des geordneten Dividendus nur ein Produkt aus zwei Faktoren sein kann. Der eine derselben ist entweder der erste oder letzte Summand des Divisors, der andere der erste bzw. letzte Summand des gesuchten Quotienten. Die anderen Glieder des Dividendus sind komplizierter zusammengesetzt. Aus dieser Überlegung folgt:

Man muß, um zu dividieren, zunächst den Dividendus und den Divisor in derselben Weise ordnen, falls noch nicht geordnet ist. Man findet dann den ersten Summanden des gesuchten Quotienten, indem man mit dem ersten Summanden des Divisors in den ersten Summanden des Dividendus dividiert.

$$18x^4 : 3x^2 = \mathbf{6x^2}.$$

Es müssen jetzt, da man zur Bildung des Produktes — unseres jetzigen Dividendus — jeden Summanden der einen Summe mit jedem Summanden der anderen Summe multipliziert hat, in dem Dividendus außer $18x^4$ noch diejenigen Summanden stecken, welche man erhält, wenn man $-4x + 5$ mit $6x^2$ multipliziert, das heißt $-24x^3 + 30x^2$. Subtrahiert man jetzt $18x^4 - 24x^3 + 30x^2$ von dem Dividendus

$$\begin{array}{r}18x^4 - 3x^3 - 22x^2 + 67x - 40 \\ 18x^4 - 24x^3 + 30x^2 \qquad\qquad\qquad \\ \hline + 21x^3 - 52x^2 + 67x - 40.\end{array}$$

, so bleibt

Das zweite Glied des Dividendus war durch Addition zweier Produkte entstanden, nämlich 1. dem Produkt aus dem ersten Gliede des Quotienten und dem zweiten Gliede des Divisors und 2. dem Produkt aus dem zweiten Gliede des Quotienten und dem ersten Gliede des Divisors. Da wir das erste Produkt abgezogen haben,

so bleibt das zweite, also das Produkt aus dem ersten Gliede des Divisors und dem zweiten Gliede des Quotienten, übrig. Wir finden demnach das zweite Glied des Quotienten, wenn wir mit dem **ersten** Gliede des Divisors in das erste Glied des Restes dividieren.

$$+21x^3 : 3x^2 = +7x.$$

Es sind nun in dem Rest alle diejenigen Produkte enthalten, die man erhält, wenn man den Divisor mit $+7x$ multipliziert, das heißt:

$$+21x^3 - 28x^2 + 35x.$$

Subtrahiert man dies von dem Rest

$$\begin{array}{r} +21x^3 - 52x^2 + 67x - 40 \\ \underline{+21x^3 - 28x^2 + 35x \phantom{{}-40}} \\ -24x^2 + 32x - 40. \end{array}$$

so bleibt

Dividiert man jetzt wieder mit dem ersten Gliede des Divisors in den ersten Summanden des nunmehrigen Restes, so findet man als dritten Summanden des Quotienten -8. In dem Rest steckt demnach noch die Summe

$$-24x^2 + 32x - 40,$$

welche von ihm subtrahiert den Rest Null ergibt. Das Ergebnis der Division ist also

$$6x^2 + 7x - 8.$$

Beispiel:

$$(10a^6 - 41a^7 + 43a^8 + 10a^9 - 24a^{10}) : (5a^4 - 3a^5 - 4a^6) = 2a^2 - 7a^3 + 6a^4$$

$$\begin{array}{l} \underline{10a^6 - 6a^7 - 8a^8} \\ \quad -35a^7 + 51a^8 + 10a^9 - 24a^{10} \\ \quad \underline{-35a^7 + 21a^8 + 28a^9} \\ \qquad\qquad +30a^8 - 18a^9 - 24a^{10} \\ \qquad\qquad \underline{+30a^8 - 18a^9 - 24a^{10}} \end{array}$$

Bei der Addition, welche zur Bildung des Produktes (des Dividendus) nötig ist, können einzelne Glieder, welche dieselben Buchstabengrößen enthalten, sich zu Null vereinigen, also verschwinden. Die einzelnen Summanden treten aber bei der Division wieder auf, wenn man den Divisor mit dem gewonnenen Gliede des Quotienten multipliziert, und müssen dann bei dem Subtrahieren an geeigneter Stelle (geordnet!) eingeschaltet werden.

Beispiel: $(27a^6 - 8) : (3a^2 - 2) = 9a^4 + 6a^2 + 4$

$$\begin{array}{l} 27a^6 \quad - 18a^4 \\ \hline \quad + 18a^4 - 8 \\ \quad + 18a^4 \quad - 12a^2 \\ \hline \quad\quad + 12a^2 - 8 \\ \quad\quad + 12a^2 - 8 \\ \hline \end{array}$$

§ 18. Zweite Erweiterung des Zahlengebietes. Die Brüche.

Die Divisionsaufgaben sind nicht immer lösbar. Es gibt zuweilen unter den bisher bekannten Zahlen keine Zahl, welche mit dem Divisor multipliziert den Dividendus als Produkt ergibt. Solche Divisionsaufgabe ist z. B. $\frac{2}{5}$ oder $\frac{7}{3}$. Will man derartige Aufgaben nicht als widersinnig betrachten, so ist man gezwungen, zu den bisherigen Zahlen, die durch die Einheiten 1, + 1, − 1 gebildet sind, durch Einführung neuer Einheiten neue Zahlen hinzuzufügen. Als solche neue Einheiten nimmt man irgendeinen beliebigen Teil der bisherigen Einheit, der Eins, an, z. B. die Hälfte, den dritten Teil, den fünften Teil usw. Diese neuen Einheiten, deren Anzahl beliebig groß ist, bezeichnet man je nach der Zahl der Teile, in welche die alte Einheit 1 geteilt ist, durch einen Quotienten, dessen Dividendus 1 und dessen Divisor die Anzahl der gleichen Teile ist, in welche man sich die Einheit geteilt denkt. Man schreibt also diese neuen Einheiten $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{5}$ usw., gesprochen „ein Halb", „ein Drittel", „ein Fünftel" usw. Zählt man von Null aufwärts nach einer dieser Einheiten, z. B. $\frac{1}{5}$, so lauten die Zahlen: Ein Fünftel, zwei Fünftel, drei Fünftel, vier Fünftel, fünf Fünftel, sechs Fünftel usw., wofür man schreibt

$$\frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}, \frac{5}{5}, \frac{6}{5}, \frac{7}{5}, \frac{8}{5}, \frac{9}{5}, \frac{10}{5}, \frac{11}{5} \ldots$$

Diese neuen so erhaltenen Zahlen, die wie Quotienten geschrieben werden und je nach der Anzahl der Teile, in welche die Einheit 1 geteilt ist, verschieden ausfallen, nennt man **Brüche** und den Bruch, nach welchem man zählt, den **Stammbruch**. Die an der Stelle des Divisors stehende Zahl, welche uns nennt, in wie viele gleiche Teile wir die Einheit geteilt denken, und nach welcher neuen Einheit wir

zählen, heißt der **Nenner** des Bruches. Die Zahl, welche an Stelle des Dividendus steht, und die angibt, wie viele der neuen Einheiten wir gezählt haben, heißt der **Zähler** des Bruches. Die bisher bekannten und benutzten Zahlen nennt man im Gegensatz zu den Brüchen **ganze Zahlen**.

Da wir die neuen Einheiten, die Stammbrüche, erhalten haben, indem wir die Eins in gleiche Teile teilten, so ist es klar, daß, wenn wir nach irgendeinem Stammbruch von Null an aufwärts zählen, in der so erhaltenen Zahlenreihe auch die Zahlen der natürlichen Zahlenreihe vorkommen werden, und zwar an den Stellen, wo der Zähler des Bruches ein ganzes Vielfaches seines Nenners ist. So ist $\frac{5}{5}$ dasselbe wie 1, $\frac{10}{5}$ dasselbe wie 2, $\frac{15}{5}$ dasselbe wie 3. Es sind dies die Stellen, wo die Divisionsaufgabe, deren Divisor 5 ist, noch lösbar ist ohne Einführung neuer Zahlen. Die dort stehenden Brüche nennt man **uneigentliche Brüche**. Jede ganze Zahl läßt sich als uneigentlicher Bruch darstellen. Die anderen Brüche heißen **eigentliche Brüche**. Unsere oben nach der Einheit $\frac{1}{5}$ gebildete Zahlenreihe könnte man also auch schreiben:

$$\frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}, 1, \frac{6}{5}, \frac{7}{5}, \frac{8}{5}, \frac{9}{5}, 2, \frac{11}{5} \dots$$

Ähnlich gestaltet sich die Zahlenreihe für andere Einheiten als $\frac{1}{5}$. So ist z. B. für $\frac{1}{3}$ die Reihe

$\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1, \frac{4}{3}, \frac{5}{3}, 2, \frac{7}{3}, \frac{8}{3}, 3, \frac{10}{3}, \dots$ Allgemein ist für b gleiche Teile $\frac{1}{b}, \frac{2}{b}, \frac{3}{b}, \dots, \frac{b}{b} = 1, \frac{b+1}{b}, \frac{b+2}{b}, \dots,$

$\frac{2b}{b} = 2, \frac{2b+1}{b}, \dots$ die entstehende Reihe.

Will man nach Art der in § 7 Fig. 2 erwähnten graphischen Darstellung der Zahlen auch Brüche darstellen, so hat man die Einheitsstrecke in so viel gleiche Teile zu teilen, wie der Nenner des Bruches angibt, und dann diesen Teil so oft abzutragen, wie der Zähler es fordert.

Ist in einem eigentlichen Bruche der Zähler kleiner als der Nenner, so nennt man ihn einen **echten Bruch**, ist der Zähler größer als der Nenner, so heißt er ein **unechter Bruch**. Jeder echte Bruch ist kleiner als Eins. Jeder unechte Bruch läßt sich in

eine Summe aus einer ganzen Zahl und einem echten Bruch verwandeln. Diese Summe nennt man eine **gemischte Zahl**.

$$\frac{7}{3} = 2 + \frac{1}{3} = 2\frac{1}{3}.$$

Hat man die Einheit in drei gleiche Teile geteilt, also mit der Einheit $\frac{1}{3}$ gezählt, und man teilt nun die Einheit in vier mal so viel Teile, zählt also nach der Einheit $\frac{1}{3 \cdot 4}$, so entsprechen jedem Teile der ersten Zahlenreihe vier Teile der neuen, d. h. es sind $\frac{2}{3}$ ebenso groß wie $\frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 4}$.

War allgemein die alte Einheit $\frac{1}{b}$, und ist die neue $\frac{1}{b \cdot n}$, so entsprechen jeder Zahl der alten Zahlenreihe n Zahlen der neuen. Es ist also

$$\frac{a}{b} = \frac{a \cdot n}{b \cdot n}.$$

Hieraus folgt der

Lehrsatz 1. Der Wert eines Bruches bleibt ungeändert, wenn man Zähler und Nenner mit derselben Zahl multipliziert. Man nennt dies den Bruch erweitern.

Einen **Bruch erweitern** heißt also Zähler und Nenner mit derselben Zahl multiplizieren.

Man ist hiernach imstande, zwei Brüche, die man durch Zählen nach verschiedenen Einheiten erhalten hat, z. B. $\frac{5}{18}$ $\left(\text{Einheit } \frac{1}{18}\right)$ und $\frac{7}{12}$ $\left(\text{Einheit } \frac{1}{12}\right)$ zurückzuführen auf zwei Brüche, die man durch Zählen nach ein und derselben Einheit erhalten würde. Dies geschieht dadurch, daß man die Brüche so erweitert, daß die Nenner einander gleich werden. Man würde dies erreichen, wenn man den ersten Bruch mit 14, den zweiten mit 21 erweiterte, oder den ersten Bruch mit 10, den zweiten mit 15 usw. Man wählt aber praktisch unter allen möglichen Zahlen die kleinsten aus. Diese findet man, wenn man von den beiden in den Nennern stehenden Zahlen das kleinste gemeinschaftliche Vielfache (hier Hauptnenner genannt) bildet, und nun diesen Hauptnenner durch die einzelnen Nenner dividiert. Der Quotient ist dann die Zahl, mit der der betreffende Bruch erweitert werden muß. In unserem Falle ist der Hauptnenner 36, der erste Bruch ist zu erweitern mit $36 : 18 = 2$, der zweite mit $36 : 12 = 3$, man erhält also $\frac{10}{36}$ und $\frac{21}{36}$. (Vgl. § 22.)

Diese Umformungen sind stets nötig, wenn es sich darum handelt, zwei Brüche zu addieren, da wir nur zwei durch dieselbe Einheit erhaltene Zahlen zu einer Zahl vereinigen können.

$$\frac{5}{18} + \frac{7}{12} = \frac{10}{36} + \frac{21}{36} = 10 \cdot \frac{1}{36} + 21 \cdot \frac{1}{36} = 31 \cdot \frac{1}{36} = \frac{31}{36}.$$

Regel für die Addition und Subtraktion von Brüchen. Zwei Brüche werden addiert (subtrahiert), indem man sie zuerst auf denselben Nenner, den Hauptnenner, bringt, dann ihre Zähler addiert (subtrahiert) und unter das erhaltene Ergebnis den Hauptnenner als Nenner schreibt.

Die oben erhaltene Formel $\frac{a}{b} = \frac{an}{bn}$ kann man auch umkehren. Dann erhält man

$$\frac{an}{bn} = \frac{a}{b}.$$

Dies ergibt den

Lehrsatz 2. Der Wert eines Bruches bleibt ungeändert, wenn man Zähler und Nenner durch dieselbe Zahl dividiert.

Man nennt dies den Bruch heben.

Einen **Bruch heben** heißt also Zähler und Nenner durch dieselbe Zahl dividieren.

Man kann hiernach, wenn Zähler und Nenner eines Bruches einen gemeinschaftlichen Faktor haben, den Wert des Bruches in kleineren Zahlen angeben.

Es ist $\frac{24}{27} = \frac{8}{9}$; $\frac{74}{111} = \frac{2}{3}$.

Da der Bruch $\frac{a}{b}$ dasselbe bedeutet wie $a \cdot \frac{1}{b}$, so erhalten wir, wenn wir den Bruch mit der ganzen Zahl n multiplizieren,

$$\frac{a}{b} \cdot n = \left(a \cdot \frac{1}{b}\right) \cdot n = an \cdot \frac{1}{b} \text{ (§ 11, 3)} = \frac{an}{b}.$$

Lehrsatz 3. Ein Bruch wird mit einer ganzen Zahl multipliziert, indem man den Zähler mit der Zahl multipliziert und den Nenner ungeändert läßt.

$$\frac{2}{7} \cdot 3 = \frac{6}{7} \qquad \frac{a^2}{b^3} \cdot a^4 = \frac{a^6}{b^3}.$$

In ähnlicher Weise kann man mit Benutzung von § 16, 3 herleiten den

Lehrsatz 4. Ein Bruch wird durch eine ganze Zahl dividiert, indem man den Zähler durch die Zahl dividiert und den Nenner ungeändert läßt.

Nach diesem Satze würde man bequem Divisionen ausführen können wie die folgenden:

$$\frac{12}{7} : 3 = \frac{4}{7}; \quad \frac{36}{11} : 12 = \frac{3}{11}; \quad \frac{a^{10}}{b^2} : a^3 = \frac{a^7}{b^2}.$$

Soll aber die Aufgabe gelöst werden $\frac{2}{3} : 5$, so würde man auf Schwierigkeiten stoßen. Bedenkt man nun aber, daß der Wert eines Bruches durch Erweitern desselben sich nicht ändert, so kann man den Bruch so erweitern, daß sein Zähler durch 5 teilbar wird. Man erhält $\frac{2 \cdot 5}{3 \cdot 5} : 5 = \frac{2}{3 \cdot 5} = \frac{2}{15}$.

Hat man allgemein $\frac{a}{b} : n$, so findet man $\frac{a \cdot n}{b \cdot n} : n$ und dann $\frac{a}{b \cdot n}$. Hieraus folgt der stets anwendbare

Lehrsatz 5. Ein Bruch wird durch eine ganze Zahl dividiert, indem man den Nenner mit der ganzen Zahl multipliziert und den Zähler ungeändert läßt.

Es bleibt nun noch zu ermitteln, in welcher Weise mit einem Bruche multipliziert und durch einen Bruch dividiert wird. Um die erste Frage zu beantworten, denken wir uns, es sei das Produkt zu bilden

$$n \cdot \frac{a}{b},$$

in welchem n der Multiplikandus und $\frac{a}{b}$ der Multiplikator ist. Das Produkt bleibt ungeändert, wenn man es mit b multipliziert und darauf durch b dividiert. Da nun aber die Multiplikation bzw. Division eines Produktes nur die Multiplikation bzw. Division eines Faktors erfordert (§ 11, 3 und § 16, 3), so können wir n dividieren und $\frac{a}{b}$ multiplizieren. Hierdurch erhalten wir

$$n \cdot \frac{a}{b} = \frac{n}{b} \cdot a = \frac{na}{b}.$$

Dies gibt den

Lehrsatz 6. Mit einem Bruche wird multipliziert, indem man mit dem Zähler multipliziert und durch den Nenner dividiert.

Ist auch der Multiplikandus ein Bruch, so erhält man auf Grund des eben ausgesprochenen Lehrsatzes mit Benutzung der Lehrsätze 3 und 5 den

Lehrsatz 7. Zwei Brüche werden multipliziert, indem

man Zähler mit Zähler und Nenner mit Nenner multipliziert.

$$\frac{3}{7} \cdot \frac{5}{8} = \frac{3 \cdot 5}{7 \cdot 8} = \frac{15}{56}; \quad \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d} = \frac{ac}{bd}.$$

Um das Dividieren durch einen Bruch, also die Aufgabe $n : \frac{a}{b}$ zu erklären, denkt man sich den Divisor mit b multipliziert, wodurch er zu der ganzen Zahl a wird. Um den Quotienten hierdurch nicht zu ändern, muß man den Dividendus ebenfalls mit b multiplizieren. Man erhält dann

$$n : \frac{a}{b} = nb : a = \frac{nb}{a}.$$

Dies ergibt den

Lehrsatz 8. Durch einen Bruch wird dividiert, indem man mit dem Nenner multipliziert und durch den Zähler dividiert.

Oder:

Durch einen Bruch wird dividiert, indem man ihn umkehrt (d. h. Zähler mit Nenner vertauscht) und dann multipliziert.

Beispiele:

$$\frac{a^5}{b^3} \cdot \frac{a^7}{b^6} = \frac{a^{12}}{b^9}; \quad \frac{a^3}{b^4} : \frac{b^2}{a^5} = \frac{a^3}{b^4} \cdot \frac{a^5}{b^2} = \frac{a^8}{b^6}.$$

Bemerkung: Das Rechnen mit gemischten Zahlen ist ebenso auszuführen wie das Rechnen mit Brüchen, da man jede gemischte Zahl in einen unechten Bruch verwandeln kann.

Dezimalbrüche.

Die **Dezimalbrüche** sind entstanden durch eine folgerichtige Fortsetzung der Schreibweise unserer Zahlen über die Einerstelle hinaus. Die Stelle, an der die Einer stehen, wird durch ein Komma, das hinter die Einer gesetzt ist, angedeutet.[1]) Die Dezimalbrüche sind also die Sonderfälle der gewöhnlichen Brüche, bei denen der Nenner eine Potenz von Zehn ist.

Da man auf die gewöhnlichen Brüche durch eine Division kommt, die, wenn man an die Einerstelle gelangt ist, einen Rest ergibt, und da man nach Einführung der Dezimalbrüche auch über die Einer hinaus weiterrechnen kann, so erkennt man:

Ein gewöhnlicher Bruch wird in einen Dezimalbruch verwandelt, indem man seinen Zähler durch den Nenner dividiert.

1) Man spricht einen Dezimalbruch, indem man die hinter dem Komma stehenden Ziffern nacheinander liest. 23,14 wird gesprochen „dreiundzwanzig Komma eins vier", niemals „dreiundzwanzig Komma vierzehn".

Hierbei ist folgendes zu beachten. Da $10 = 2 \cdot 5$ ist, so ist jeder Nenner eines Dezimalbruches ein Produkt von zwei mit demselben Exponenten versehenen Potenzen von 2 und 5. Enthält nun der Nenner eines gewöhnlichen Bruches nur die Faktoren 2 und 5, so kann man es stets durch Erweitern des Bruches erreichen, daß sein Nenner eine Potenz von 10 wird.

$$\frac{1}{2} = \frac{5}{2 \cdot 5} = \frac{5}{10} = 0{,}5$$
$$\frac{7}{40} = \frac{7}{2^3 \cdot 5} = \frac{7 \cdot 5^2}{2^3 \cdot 5^3} = \frac{175}{1000} = 0{,}175.$$

In den Fällen also, wo der Nenner des gewöhnlichen Bruches nur die Faktoren 2 und 5 enthält, geht die zu seiner Verwandlung in einen Dezimalbruch nötige Division auf. Man erhält einen endlichen Dezimalbruch.

Besteht der Nenner aus anderen Faktoren als 2 und 5, oder enthält er außer diesen noch andere Faktoren, so kann man den Nenner nie durch Erweitern in eine Potenz von 10 verwandeln. Die Division geht nie auf, und man erhält einen unendlichen Dezimalbruch. Dieser unendliche Dezimalbruch besitzt aber eine besondere Eigenschaft.

Die Anzahl der voneinander verschiedenen Reste, welche bei der Division durch eine beliebige Zahl bleiben können, ist beschränkt. Sie ist gleich der Anzahl der Zahlen, die kleiner als der Divisor sind. Dividiert man durch 7, so sind 6, dividiert man durch 11, so sind 10 verschiedene Reste möglich. Es wird also bei der Verwandlung eines gewöhnlichen Bruches der zuletzt genannten Art in einen Dezimalbruch, spätestens nachdem alle möglichen Reste aufgetreten sind, der erste Rest wieder erscheinen, und damit die im Dezimalbruch als Ziffern auftretenden Quotienten sich wiederholen. Man erhält einen unendlichen periodischen Dezimalbruch.

$$\frac{1}{7} = 0{,}\overline{142857}142857\ldots; \quad \frac{5}{11} = 0{,}\overline{45}45\ldots$$

Die Periode beginnt stets hinter dem Komma, wenn der Nenner des Bruches die Faktoren 2 und 5 überhaupt nicht enthält. Der Bruch heißt dann ein rein periodischer Dezimalbruch. Treten aber im Nenner auch die Faktoren 2 und 5 auf, so beginnt die Periode erst später. Man erhält einen unrein periodischen Dezimalbruch. Ist z. B. $\frac{7}{12}$ zu verwandeln, und man dividiert 7 zunächst durch 4, dann findet

man 1,75. Dividiert man nun durch 3, dann beginnt die Periode erst in der dritten Stelle. Es ist

$$\frac{7}{12} = 0{,}58\overline{3}33\ldots$$

Die Verwandlung eines endlichen Dezimalbruches in einen gewöhnlichen Bruch bietet keine Schwierigkeit.

$$0{,}49 = \frac{49}{100}; \quad 0{,}375 = \frac{375}{1000} = \frac{3}{8}.$$

Es sei an dieser Stelle noch kurz auseinandergesetzt, in welcher Weise ein unendlicher periodischer Dezimalbruch in einen gewöhnlichen Bruch verwandelt wird. Ist 0,3636 ... zu berechnen, so setzt man

$$x = 0{,}3636\ldots$$

Diese Gleichung multipliziert man mit derjenigen Potenz von 10, die bewirkt, daß das Komma hinter die erste Periode rückt, also mit 100. Dadurch erhält man

$$100x = 36{,}3636\ldots$$

Wenn man von dieser Gleichung die erste abzieht, so findet man

$$99x = 36, \quad x = \frac{4}{11}.$$

Beginnt die Periode nicht gleich hinter dem Komma, ist z. B.

$$x = 0{,}14545\ldots,$$

so multipliziert man die Gleichung mit solchen Potenzen von 10, daß das Komma einmal hinter die erste Periode, dann vor die erste Periode rückt, und subtrahiert hierauf beide Gleichungen voneinander.

$$\begin{aligned} 1000x &= 145{,}4545\ldots \\ 10x &= 1{,}4545\ldots \\ \hline 990x &= 144 \\ x &= \frac{144}{990} = \frac{8}{55}. \end{aligned}$$

Das Rechnen mit Dezimalbrüchen.

Addition und Subtraktion. Damit gleich hohe Potenzen von 10 untereinander zu stehen kommen, schreibt man die Brüche so, daß Komma unter Komma steht, und addiert dann wie bei gewöhnlichen Zahlen.

Multiplikation. Man multipliziert nach der Regel für gewöhnliche Brüche (Lehrs. 7). Da zwei Potenzen von 10 ein Produkt ergeben, das hinter der Eins so viel Nullen besitzt, wie die Faktoren zusammen besitzen, so hat man die Regel:

Dezimalbrüche werden ohne Rücksicht auf das Komma wie ganze Zahlen multipliziert, und dann werden im Produkt so viel Stellen von rechts nach links abgestrichen, wie die Faktoren zusammen besitzen. Etwa fehlende Stellen müssen hierbei durch Nullen ersetzt werden. $0{,}73 \cdot 0{,}002 = 0{,}00146$.

Division. Durch einen Dezimalbruch wird dividiert, indem man zuerst im Divisor und im Dividendus das Komma gleichmäßig um so viel Stellen nach rechts rückt, daß der Divisor eine ganze Zahl wird, und dann mit dieser die Division ausführt.

Diese Regel beruht darauf, daß man jede Divisionsaufgabe als Bruch betrachten kann, und daß ein Bruch durch Erweitern seinen Wert nicht ändert. Das Rücken des Kommas ist nämlich ein Erweitern mit einer Potenz von 10.

$$0{,}7 : 0{,}05 = \frac{0{,}7}{0{,}05} = \frac{70}{5} = 14; \qquad 1{,}26 : 0{,}3 = \frac{1{,}26}{0{,}3} = \frac{12{,}6}{3} = 4{,}2.$$

§ 19. Das Zerlegen in Faktoren.

Der größte gemeinschaftliche Faktor oder Teiler.

Es ist aus dem Rechenunterricht bekannt, daß man die meisten Zahlen in Produkte verwandeln, oder, wie man auch sagt, in Faktoren zerlegen kann. So ist $14 = 2 \cdot 7$, $24 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 = 2^3 \cdot 3$, $360 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5$. Zahlen, die diese Zerlegung nicht gestatten, wie z. B. die Faktoren obiger Produkte, ferner 11, 13, 17 usw. nennt man Primzahlen. Es gibt kein bestimmtes Gesetz, nach welchem die Primzahlen unter den übrigen Zahlen vorkommen. Zu ihrer Ermittelung kann man ein schon im Altertum angewendetes Verfahren gebrauchen (das Sieb des Eratosthenes). Man schreibt die Zahlen der Reihe nach auf.

1	2	3	~~4~~	5	~~6~~	7	~~8~~	~~9~~	~~10~~
11	~~12~~	13	~~14~~	~~15~~	~~16~~	17	~~18~~	19	~~20~~
~~21~~	~~22~~	23	~~24~~	~~25~~	~~26~~	~~27~~	~~28~~	29	~~30~~
31	~~32~~	~~33~~	~~34~~	~~35~~	~~36~~	37	~~38~~	~~39~~	~~40~~
41	~~42~~	43	~~44~~	~~45~~	~~46~~	47	~~48~~	~~49~~	~~50~~ . . .

Nun durchstreicht man zunächst alle durch 2 teilbaren Zahlen außer 2. Die erste auf 2 folgende nicht durchstrichene Zahl ist 3. Jetzt durchstreicht man alle durch 3 teilbaren Zahlen außer 3, d. h. von der 3 ausgehend jedesmal die dritte Zahl, sofern sie nicht schon durchstrichen ist. Die erste bisher nicht durchstrichene Zahl ist 5.

Von dieser ausgehend durchstreicht man alle durch 5 teilbaren Zahlen, d. h. von der 5 aus jedesmal die fünfte Zahl. In dieser Weise fährt man fort, bis keine Zahl mehr durchstrichen werden kann. Die nicht durchstrichenen Zahlen sind dann die Primzahlen innerhalb des untersuchten Zahlengebietes.

Will man eine Zahl in ihre Primfaktoren (so nennt man die Faktoren des ihr gleichen Produktes) zerlegen, so muß man durch Division mit denjenigen Primzahlen, die kleiner als sie sind, sich überzeugen, ob dieselben als Faktoren in ihr enthalten sind. Zur Erleichterung der Ermittelung der Primfaktoren hat man für eine Anzahl von Zahlen Regeln aufgestellt, nach denen man schnell erkennen kann, ob eine zweite Zahl durch sie ohne Rest teilbar ist oder nicht. Die bekannten Regeln sind

1. Eine Zahl ist durch 2 teilbar, wenn ihre letzte Ziffer durch 2 teilbar ist. — Die durch 2 teilbaren Zahlen nennt man gerade Zahlen, die übrigen ungerade Zahlen.

2. Eine Zahl ist durch 4 teilbar, wenn die durch ihre beiden letzten Ziffern dargestellte Zahl durch 4 teilbar ist.

3. Eine Zahl ist durch 8 teilbar, wenn die durch ihre drei letzten Ziffern dargestellte Zahl durch 8 teilbar ist.

4. Eine Zahl ist durch 3 teilbar, wenn ihre Quersumme durch 3 teilbar ist.

Erklärung: Unter der Quersumme einer Zahl versteht man die Summe ihrer Ziffern.

Die Zahl 57054 hat die Quersumme 21, ist also durch 3 teilbar.

Die Regel für die Teilbarkeit einer Zahl durch 3 läßt sich folgendermaßen erklären. Sind a, b und c die Ziffern einer Zahl, so heißt diese $100a + 10b + c$ (§ 28). Hierfür kann man auch schreiben $(99a + 9b) + (a + b + c)$. Die erste Klammer ist stets durch 3 teilbar. Es hängt daher die Teilbarkeit der ganzen Zahl durch 3 von der Teilbarkeit der zweiten Klammer ab, in der die Quersumme der Zahl steht. Da die erste Klammer auch stets durch 9 teilbar ist, so erkennt man hieraus:

5. Eine Zahl ist durch 9 teilbar, wenn ihre Quersumme durch 9 teilbar ist.

6. Eine Zahl ist durch 5 teilbar, wenn ihre letzte Ziffer eine 5 oder 0 ist.

Hat man zwei oder mehrere Zahlen in ihre Primfaktoren zerlegt, so kann es vorkommen, daß die dadurch entstandenen Produkte einen oder mehrere Faktoren gemeinschaftlich haben. Das Produkt

dieser Faktoren heißt der **größte gemeinschaftliche Faktor** oder **Teiler** dieser Zahlen. Die Zahlen 84, 66 und 90 geben, in Faktoren zerlegt, die Produkte $84 = 2^2 \cdot 3 \cdot 7$, $66 = 2 \cdot 3 \cdot 11$ und $90 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5$. Demnach ist der größte gemeinschaftliche Faktor der drei Zahlen das Produkt $2 \cdot 3 = 6$.

Besitzen zwei Zahlen keinen gemeinschaftlichen Faktor, wie z. B. $21 = 3 \cdot 7$ und $50 = 2 \cdot 5^2$, so nennt man sie **relative Primzahlen**.

Häufig ist es recht schwierig, die Zerlegung **einer** Zahl in Faktoren auszuführen, besonders wenn dieselbe ein Produkt großer Primzahlen ist. In diesem Falle gibt es aber wenigstens ein Mittel, ohne Zerlegung in Faktoren den größten gemeinschaftlichen Faktor **zweier** Zahlen zu bestimmen. Man dividiert mit der kleineren Zahl in die größere, dann mit dem Rest in den Divisor, mit dem neuen Rest in den eben benutzten Divisor und so fort, bis kein Rest mehr bleibt. Der letzte Divisor ist dann der größte gemeinschaftliche Faktor oder Teiler.

Aufgabe 1. Es soll der größte gemeinschaftliche Teiler der Zahlen 893 und 1081 bestimmt werden.

$$1081 : 893 = 1 \text{ Rest } 188;\quad 893 : 188 = 4 \text{ Rest } 141$$
$$188 : 141 = 1 \text{ Rest } 47;\quad 141 : 47 = 3 \text{ Rest } 0.$$

47 ist der gesuchte Teiler. Er ist in 893 19mal und in 1081 23mal enthalten.

Aufgabe 2. Es soll der größte gemeinschaftliche Faktor der Zahlen 659 und 514 bestimmt werden.

$$659 : 514 = 1 \text{ Rest } 145;\quad 514 : 145 = 3 \text{ Rest } 79$$
$$145 : 79 = 1 \text{ Rest } 66;\quad 79 : 66 = 1 \text{ Rest } 13$$
$$66 : 13 = 5 \text{ Rest } 1;\quad 13 : 1 = 13 \text{ Rest } 0.$$

Die Zahlen besitzen 1 als größten gemeinschaftlichen Faktor, sind also relative Primzahlen.

Die Richtigkeit dieses Verfahrens läßt sich folgendermaßen beweisen: Es seien a und b die gegebenen Zahlen ($a > b$)[1]. Es sei ferner

$$a : b = q_1 \text{ Rest } r_1;\quad b : r_1 = q_2 \text{ Rest } r_2$$
$$r_1 : r_2 = q_3 \text{ Rest } r_3;\quad r_2 : r_3 = q_4 \text{ Rest } 0. \text{ Dann ist}$$
$$a = bq_1 + r_1;\quad b = r_1 q_2 + r_2$$
$$r_1 = r_2 q_3 + r_3;\quad r_2 = r_3 q_4.$$

1) Das Zeichen $>$ bedeutet „größer als“, das Zeichen $<$ heißt „kleiner als“.

Nun ist r_3 ein Teiler von r_2, mithin muß r_3 auch ein Teiler von $r_2 q_3 + r_3$ d. h. von r_1 sein, wenn es aber ein Teiler von r_1 ist, muß es auch ein Teiler von $r_1 q_2 + r_2$, d. h. von b sein, wenn es aber ein Teiler von b ist, muß es auch ein Teiler von $bq_1 + r_1$, d. h. von a sein. Es ist also r_3 ein Teiler von a und b. Daß r_3 auch der größte Teiler von a und b ist, wird nun indirekt bewiesen. Angenommen, r_3 sei nicht der größte gemeinschaftliche Teiler von a und b, sondern s, dann müßte s wegen der Gleichung $a = bq_1 + r_1$ auch ein Teiler von r_1 sein. Ist aber s ein Teiler von b und r_1, dann muß es auch wegen der Gleichung $b = r_1 q_2 + r_2$ ein Teiler von r_2 sein und schließlich, weil es ein Teiler von r_1 und r_2 ist, auch ein Teiler von r_3; dies ist aber unmöglich, weil $s > r_3$ sein sollte.

§ 20. Die Zerlegung algebraischer Summen in Faktoren.

Jeder arithmetische Lehrsatz läßt sich umkehren. Man findet die Umkehrung, wenn man in der Formel, welche den Inhalt des Lehrsatzes ausdrückt, die beiden Seiten miteinander vertauscht. So bekommt man aus dem Lehrsatz über die Multiplikation einer Summe

$a \cdot (b + c - d) = ab + ac - ad$ (§ 11, 2) die Formel

$$ab + ac - ad = a\,(b + c - d).$$

Diese Formel sagt: Haben sämtliche Glieder einer algebraischen Summe einen gemeinsamen Faktor, so kann man die Summe in ein Produkt verwandeln, dessen einer Faktor eben dieser gemeinschaftliche Faktor ist, und dessen anderen Faktor man erhält, wenn man die Summe durch den gemeinsamen Faktor dividiert.

Man pflegt diese Operation dadurch anzudeuten, daß man sagt, man **setze** in der gegebenen Summe **den gemeinschaftlichen Faktor vor die Klammer**, oder, man **zerlege die Summe in Faktoren**.

Wie man diesen gemeinschaftlichen Faktor bei Zahlen findet, ist im § 19 erklärt. Bei Buchstabengrößen ist er stets die Potenz mit dem kleinsten Exponenten.

Beispiele:

1. $18a + 24b = 6 \cdot (3a + 4b)$
2. $3a^5 + 7a^2 b = a^2 \cdot (3a^3 + 7b)$
3. $30a^4 b^7 + 20a^2 b^9 - 25a^3 b^5 = 5a^2 b^5 \cdot (6a^2 b^2 + 4b^4 - 5a)$
4. $3a^2 + 12a^3 = 3a^2 \cdot (1 + 4a)$.
5. Aus der Gleichung $ax + bc = bx + ac$ folgt
   $ax - bx = ac - bc$, $\quad x(a - b) = c\,(a - b)$; $x = c$.

6. $35bx + 12a^2 - a(15x + 28b) = 0$; $(x = 0{,}8a)$.

7. $10ax + 4a^2(a^2 - 5b) = 5b(10a - x) + (2a^2 - 5b)^2$; $(x = 5b)$.

Die Zerlegung in Faktoren ist unter Umständen auch dann noch möglich, wenn die einzelnen Summanden keinen gemeinschaftlichen Faktor besitzen.

I. Wenn man eine **Differenz** von Quadraten hat, so kann man diese Differenz noch zerlegen mit Benutzung der Umkehrung der Formel § 15, III. Nach dieser ist

$$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b).$$

Der Inhalt dieser Formel wird ausgedrückt durch den

Lehrsatz: Die Differenz zweier Quadrate ist gleich dem Produkt aus der Summe und der Differenz der Grundzahlen.

Beispiele:

1. $25a^2 - 49b^2 = (5a + 7b)(5a - 7b)$.
2. $36a^4 - 121b^8 = (6a^2 + 11b^4)(6a^2 - 11b^4)$.
3. $9a^6b^{10} - 1 = (3a^3b^5 + 1)(3a^3b^5 - 1)$.
4. $a^8 - b^{16} = (a^4 + b^8)(a^4 - b^8)$

$$= (a^4 + b^8)(a^2 + b^4)(a^2 - b^4)$$
$$= (a^4 + b^8)(a^2 + b^4)(a + b^2)(a - b^2).$$

5. Aus der Gleichung $a(ax + b^2) - b^2x = a^2b$

folgt $a^2x + ab^2 - b^2x = a^2b$, $a^2x - b^2x = a^2b - ab^2$,

$$x(a^2 - b^2) = ab(a - b),\ x = \frac{ab}{a + b}.$$

6. $4a(x + 5) = 4a(8a + 5) - 5b(x + 10b)$; $(x = 2[4a - 5b])$.

II. Wenn man eine **Summe** von zwei Quadraten hat, die vermehrt oder vermindert ist um das doppelte Produkt ihrer Grundzahlen, so benutzt man die Umkehrungen der Formeln § 15, I und II

$$a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2 \text{ und } a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2.$$

Beispiele: 1. $16a^2 + 24ab + 9b^2 = (4a + 3b)^2$

2. $25a^4 - 70a^2b^3 + 49b^6 = (5a^2 - 7b^3)^2$

3. $9x^2 - 6x + 1 = (3x - 1)^2$.

Oft zerlegt man eine Summe in Faktoren durch Heraussetzen eines gemeinschaftlichen Faktors und Anwendung der obigen Formeln.

Beispiele:

1. $27a^3b^2 - 48ab^4 = 3ab^2(9a^2 - 16b^2)$
$$= 3ab^2(3a + 4b)(3a - 4b)$$

2. $125a^3b + 150a^2b^2 + 45ab^3 = 5ab(25a^2 + 30ab + 9b^2)$
$$= 5ab(5a + 3b)^2.$$

III. Die Zerlegung einer viergliedrigen Summe ist vielfach dadurch möglich, daß man je zwei Summanden durch Heraussetzen eines gemeinschaftlichen Faktors zu einem Summanden zusammenfaßt.

Beispiele:

1. Es sei $6a^3 + 10a^2b + 9a + 15b$ in Faktoren zu zerlegen.

Faßt man den ersten und zweiten und dann den dritten und vierten Summanden zusammen, so erhält man

$$6a^3 + 10a^2b + 9a + 15b = 2a^2(3a + 5b) + 3 \cdot (3a + 5b)$$
$$= (3a + 5b) \cdot (2a^2 + 3).$$

Faßt man den ersten und dritten und dann den zweiten und vierten Summanden zusammen, so erhält man

$$6a^3 + 10a^2b + 9a + 15b = 3a(2a^2 + 3) + 5b(2a^2 + 3)$$
$$= (2a^2 + 3) \cdot (3a + 5b),$$

d. h. dasselbe Produkt mit veränderter Folge der Faktoren.

Faßt man den ersten und vierten und den zweiten und dritten Summanden zusammen, so erhält man

$$6a^3 + 10a^2b + 9a + 15b = 3 \cdot (2a^3 + 5b) + a(10ab + 9).$$

Dies ist eine zweigliedrige Summe, die sich nicht weiter zerlegen läßt. Man sieht also, daß nicht jede beliebige Zusammenfassung zu einem brauchbaren Ergebnis führt, und erkennt, daß eine solche Zusammenfassung nicht stets zum Ziele zu führen braucht.

2. Es sei $21x^5 - 24x^2y^2 + 16y^3 - 14x^3y$ in Faktoren zu zerlegen.

Faßt man das erste und zweite und dann das dritte und vierte Glied zusammen, so erhält man

$$21x^5 - 24x^2y^2 + 16y^3 - 14x^3y = 3x^2(7x^3 - 8y^2)$$
$$+ 2y(8y^2 - 7x^3).$$

Die in den Klammern stehenden Differenzen sind verschieden, unterscheiden sich aber nur durch die Folge der Glieder. In einem solchen Falle kann man die Differenzen in Übereinstimmung bringen, wenn

man an einer Stelle statt des herausgesetzten Faktors denselben Faktor, aber mit entgegengesetztem Vorzeichen, vor die Klammer setzt.

Man merke $a - b = -(b - a)$.

In unserer Aufgabe gestaltet sich also die Zerlegung folgendermaßen:

$$21x^5 - 24x^2y^2 + 16y^3 - 14x^3y = 3x^2(7x^3 - 8y^2)$$
$$- 2y(7x^3 - 8y^2) = (7x^3 - 8y^2)(3x^2 - 2y).$$

Die in diesem Paragraphen auseinandergesetzte Zerlegung in Faktoren findet Anwendung beim Heben der Brüche und bei dem Addieren der Brüche. Hiervon sollen die beiden nächsten Paragraphen handeln.

§ 21. Das Heben der Brüche.

Ist ein Bruch gegeben, dessen Zähler und Nenner Buchstabenausdrücke sind, so muß man, um ihn zu heben, den Zähler und den Nenner in Faktoren zerlegen nach den Regeln in § 19 und § 20 und dann durch die etwa vorhandenen gemeinschaftlichen Faktoren Zähler und Nenner dividieren. Sind gemeinschaftliche Faktoren nicht vorhanden, so läßt sich der Bruch nicht heben. Es genügt, das Heben der Brüche an einigen Beispielen klarzumachen.

1. $\frac{15a^3b^2}{5a^5b} = \frac{3b}{a^2}$.

2. $\frac{8a^5 - 28a^2b^2}{6a^3b^2 - 21b^4} = \frac{4a^2(2a^3 - 7b^2)}{3b^2(2a^3 - 7b^2)} = \frac{4a^2}{3b^2}$.

3. $\frac{a^2 - b^2}{a + b} = \frac{(a + b)(a - b)}{a + b} = a - b$.

4. $\frac{4a^2 - 12ab + 9b^2}{10a^2 - 15ab} = \frac{(2a - 3b)^2}{5a(2a - 3b)} = \frac{2a - 3b}{5a}$.

5. $\frac{6a^2 - 14ab + 9ax - 21bx}{15a^2 - 12ax - 35ab + 28bx} = \frac{2a(3a - 7b) + 3x(3a - 7b)}{3a(5a - 4x) - 7b(5a - 4x)} =$

$\frac{(3a - 7b) \cdot (2a + 3x)}{(5a - 4x) \cdot (3a - 7b)} = \frac{2a + 3x}{5a - 4x}$.

Weitere Beispiele. 1. $\frac{18a^3b^3 - 45a^2b^5}{6a^2b^2 - 15ab^4}$; $(3ab)$.

2. $\frac{54a^4b - 150a^2b^3}{9a^2b - 15ab^2}$; $(2a[3a + 5b])$.

3. $\frac{24a^2 + 30ab - 28ax - 35bx}{12a^2 - 14ax - 18ab + 21bx}$; $\left(\frac{4a + 5b}{2a - 3b}\right)$.

§ 22. Das Addieren und Subtrahieren der Brüche. Das kleinste gemeinschaftliche Vielfache.

Die Umkehrung des Lehrsatzes § 16, 2 lautet

$$\frac{a}{n} + \frac{b}{n} - \frac{c}{n} = \frac{a+b-c}{n}.$$

Sie lehrt uns, daß wir Brüche, die im Nenner übereinstimmen — die gleichnamig sind —, addieren, indem wir die Zähler addieren und den gemeinsamen Nenner als Nenner unter das Ergebnis der Addition schreiben. Die Addition der Brüche erfordert also in erster Linie das Gleichnamigmachen derselben. Hierbei ist es von Wichtigkeit, stets die kleinste Zahl zu ermitteln, die durch sämtliche Nenner ohne Rest geteilt werden kann. Diese Zahl nennt man den Hauptnenner der Brüche. Der Hauptnenner ist das kleinste gemeinschaftliche Vielfache der die Nenner bildenden Zahlen.

Ist für die Zahlen 12, 18, 30, 35 das kleinste gemeinschaftliche Vielfache zu ermitteln, so zerlegt man die Zahlen zunächst in ihre Primfaktoren.

$$\begin{aligned} 12 &= 2\cdot 2\cdot 3 = \mathbf{2^2}\cdot 3 \\ 18 &= 2\cdot 3\cdot 3 = 2\cdot \mathbf{3^2} \\ 30 &= 2\cdot 3\cdot \mathbf{5} \\ 35 &= 5\cdot \mathbf{7}. \end{aligned}$$

Läßt man jetzt jede Primzahl an nur einer Stelle, an der sie am häufigsten vorkommt, stehen und durchstreicht sie an allen übrigen Stellen, auch an denen, wo sie ebenso häufig wie an der gewählten Stelle vorkommt, so ist das Produkt der stehengebliebenen Zahlen das kleinste gemeinschaftliche Vielfache. In unserem Falle bleiben nur die fettgedruckten Zahlen stehen, und wir finden:

$$2^2\cdot 3^2\cdot 5\cdot 7.$$

In ganz ähnlicher Weise verfährt man beim Aufsuchen des kleinsten gemeinschaftlichen Vielfachen bei Buchstabenausdrücken und algebraischen Summen.

Für a^2x^3, ax^5, a^2x^2 ist das kleinste gemeinschaftliche Vielfache a^2x^5.

Um dasselbe für $18a + 12b$, $9a - 6b$, $9a^2 - 4b^2$ zu finden, zerlegt man zunächst nach den Regeln in § 20.

$$\begin{aligned} 18a + 12b &= 2\cdot 3\cdot (3a+2b) \\ 9a - 6b &= 3\cdot (3a-2b) \\ 9a^2 - 4b^2 &= (3a+2b)\cdot(3a-2b). \end{aligned}$$

Das kleinste gemeinschaftliche Vielfache ist also

$$2\cdot 3\cdot (3a+2b)\cdot(3a-2b).$$

Ist in dieser Weise das kleinste gemeinschaftliche Vielfache für die Nenner der Brüche, welche addiert werden sollen, gefunden, dann dividiert man dieses Vielfache durch die Nenner der einzelnen Brüche. Der gefundene Quotient ist dann jedesmal der Ausdruck, mit welchem man den betreffenden Bruch erweitern muß, damit sämtliche Brüche gleichnamig werden. (§ 18.)

Beispiele:

1. $$\frac{5a-2b}{12}-\frac{3a-4b}{10}+\frac{2a+3b}{30}$$
$$=\frac{25a-10b}{60}-\frac{18a-24b}{60}+\frac{4a+6b}{60}$$
$$=\frac{25a-10b-(18a-24b)+(4a+6b)}{60}$$
$$=\frac{25a-10b-18a+24b+4a+6b}{60}=\frac{11a+20b}{60}.$$

2. $$\frac{x}{y}+\frac{2x^2+y^2}{xy}+\frac{5xy^2-3x^3}{x^2y}-\frac{4xy-y^2}{x^2}$$
$$=\frac{x^3}{x^2y}+\frac{2x^3+xy^2}{x^2y}+\frac{5xy^2-3x^3}{x^2y}-\frac{4xy^2-y^3}{x^2y}$$
$$=\frac{x^3+2x^3+xy^2+5xy^2-3x^3-4xy^2+y^3}{x^2y}=\frac{2xy^2+y^3}{x^2y}=\frac{2xy+y^2}{x^2}.$$

3. $$\frac{3a+b}{4a-b}-\frac{3a-b}{4a+b}+\frac{b^2-10ab}{16a^2-b^2}$$
$$=\frac{(3a+b)\ (4a+b)-(3a-b)\ (4a-b)+b^2-10ab}{(4a-b)\ (4a+b)}$$
$$=\frac{12a^2+4ab+3ab+b^2-12a^2+4ab+3ab-b^2+b^2-10ab}{(4a-b)\ (4a+b)}$$
$$=\frac{4ab+b^2}{(4a-b)\ (4a+b)}=\frac{b\ (4a+b)}{(4a-b)\ (4a+b)}=\frac{b}{4a-b}.$$

Anwendungen bei Gleichungen.

Sind in einer Gleichung Brüche vorhanden, so kann man, nachdem man zu den sämtlichen Nennern das kleinste gemeinschaftliche Vielfache ermittelt hat, die Brüche fortschaffen. Es sei die Gleichung gegeben

$$\frac{1}{4}(3x-5)-\frac{1}{10}(4-5x)=4+\frac{1}{5}(x-2),$$

oder in anderer Schreibweise

$$\frac{3x-5}{4}-\frac{4-5x}{10}=4+\frac{x-2}{5}.$$

Das kleinste gemeinschaftliche Vielfache der Nenner ist 20. Man stellt nun die identische Gleichung

$$20 = 20$$

auf und wendet auf diese Gleichung und die gegebene den Grundsatz an: Gleiches mit Gleichem multipliziert gibt gleiche Produkte. Dadurch erhält man

$$20 \cdot \left(\frac{3x-5}{4} - \frac{4-5x}{10}\right) = 20 \cdot \left(4 + \frac{x-2}{5}\right)$$

und nach Auflösung der Klammern

$$15x - 25 - 8 + 10x = 80 + 4x - 8.$$

Gewöhnlich pflegt man hierfür kurz zu sagen, man multipliziere die Gleichung mit 20.

Aus der erhaltenen Gleichung findet man dann $21x = 105$; $x = 5$.

Weitere Beispiele:

$$1.\quad \frac{4}{3x-6} + \frac{5}{2x-4} = \frac{23}{6}.$$

Das kleinste gemeinschaftliche Vielfache der Nenner ist $2 \cdot 3 \cdot (x-2)$. Multipliziert man mit diesem die Gleichung, so findet man

$$2 \cdot 3 \cdot (x-2) \cdot \frac{4}{3(x-2)} + 2 \cdot 3 \cdot (x-2) \cdot \frac{5}{2(x-2)}$$
$$= 2 \cdot 3 \cdot (x-2) \cdot \frac{23}{6},$$
$$8 + 15 = 23x - 46, \quad -23x = -69, \quad x = 3.$$

$$2.\quad \frac{2x+1}{6x-4} - \frac{47-27x^2}{54x^2-24} = \frac{5}{6}.$$

Multipliziert man die Gleichung mit dem kleinsten gemeinschaftlichen Vielfachen der Nenner $2 \cdot 3 \cdot (3x+2)(3x-2)$, so erhält man

$$3\,(3x+2)\,(2x+1) - (47 - 27x^2) = 5\,(3x+2)\,(3x-2),$$
$$18x^2 + 21x + 6 - 47 + 27x^2 = 45x^2 - 20,$$
$$21x = 21,\ x = 1.$$

$$3.\ \frac{x}{b} + \frac{x}{a} = \frac{a^2-b^2}{ab};\ (x = a - b).$$

$$4.\ \frac{7x+2}{3x+6} + \frac{5x-2}{2x+4} = 4;\ (x = 10).$$

$$5.\ \frac{3x-9}{4x-22} - \frac{x+2}{6x-33} - \frac{x+5}{8x-44} = 0;\ (x = 7).$$

$$6.\ \frac{x+1}{x-5} - \frac{x+60}{x+5} = \frac{5x+3}{3x^2-75};\ (x = 6).$$

§ 23. Das Rechnen mit benannten Zahlen. Teilen und Messen.

Sollen benannte Zahlen addiert oder subtrahiert werden, so ist es nötig, daß beide Summanden gleich oder wenigstens gleichartig benannt sind, so daß man vor Ausführung der Addition bzw. Subtraktion die gleichartigen Benennungen auf gleiche Benennung zurückführen kann. Das Resultat hat dann dieselbe Benennung wie die Summanden.

$$17 \text{ Liter} + 11 \text{ Liter} = 28 \text{ Liter}$$

$$5 \text{ m} + 7 \text{ cm} = 5 \text{ m} + 0{,}07 \text{ m} = 5{,}07 \text{ m}$$
$$= 500 \text{ cm} + 7 \text{ cm} = 507 \text{ cm}.$$

Der Begriff der Multiplikation verlangt, daß der Multiplikator stets eine unbenannte Zahl ist, der Multiplikandus darf beliebig benannt sein, und die Benennung des Produktes richtet sich nach der des Multiplikandus.

$$5 \cdot 12 \text{ m} = 60 \text{ m}; \quad 4 \cdot 8 \text{ Bücher} = 32 \text{ Bücher}.$$

Hat man es bei der Multiplikation mit benannten Zahlen zu tun, so gilt also das Kommutationsgesetz nicht. Dies ist der Grund, weshalb die beiden durch das Malzeichen miteinander verknüpften Teile des Produktes, die bei einem Zahlenprodukt Faktoren genannt werden durften, die verschiedenen Benennungen tragen. Es folgt aber auch, daß, wenn wir uns die Umkehrung einer Multiplikationsaufgabe bilden, die benannte Zahlen enthält, wir nicht mehr wie bei der Multiplikation unbenannter Zahlen auf nur eine Umkehrung (Division) kommen werden. Wir müssen vielmehr unterscheiden, ob außer dem benannten Produkt der benannte Multiplikandus oder der unbenannte Multiplikator gegeben ist. Die Multiplikation benannter Zahlen hat also zwei Umkehrungen.

Erste Umkehrung: das Teilen. Gegeben ist das benannte Produkt und der unbenannte Multiplikator, gesucht der benannte Multiplikandus.

$$\frac{60 \text{ m}}{5} = 12 \text{ m}.$$

Zweite Umkehrung: das Messen. Gegeben ist das benannte Produkt und der benannte Multiplikandus, gesucht der unbenannte Multiplikator.

$$\frac{60 \text{ m}}{12 \text{ m}} = 5.$$

Der gesuchte unbenannte Multiplikator heißt in diesem Falle entweder die Maßzahl des gegebenen Produktes (zu messende Größe), wenn mit dem gegebenen Multiplikandus (Maß) gemessen wird, oder er heißt

die Verhältniszahl oder das Verhältnis dieser beiden Größen. Die Verhältniszahl ist also als gesuchter Multiplikator ebenso wie die Maßzahl stets eine unbenannte Zahl.

Man spricht auch von dem Verhältnis unbenannter Zahlen.

Außer bei der Addition und Multiplikation und ihren Umkehrungen können benannte Zahlen nicht auftreten, denn die Potenzierung fordert Gleichheit der Faktoren, und damit sind die benannten Zahlen ausgeschlossen.

§ 24. Die Proportionen.

Erklärung. Eine Gleichung, welche aussagt, daß zwei Verhältnisse (oder zwei Brüche) einander gleich sind, heißt eine Proportion. Die Normalform der Proportion ist $a:b = c:d$ oder in anderer Schreibweise

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}.$$

Aus der ersten Schreibweise ist es verständlich, daß man a und d äußere Glieder, b und c innere Glieder der Proportion nennt.

Über die Proportionen gelten folgende leicht zu beweisende Lehrsätze:

Lehrsatz 1. In jeder Proportion ist das Produkt der äußeren Glieder gleich dem Produkt der inneren Glieder.

Voraussetzung: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$.

Behauptung: $ad = bc$.

Beweis: Multipliziert man die Voraussetzung mit dem Hauptnenner bd, so folgt die Behauptung.

Infolge dieses Lehrsatzes kann man aus jeder Gleichung zwischen zwei Produkten von je zwei Faktoren eine Proportion herleiten, indem man die Faktoren des einen Produktes zu inneren Gliedern, die Faktoren des anderen Produktes zu äußeren Gliedern macht. Aus

$$xy = ab$$

folgt

$$x:a = b:y, \quad x:b = a:y, \quad a:x = y:b \text{ usw.}$$

Lehrsatz 2. Wenn man in einer Proportion die äußeren oder die inneren Glieder miteinander vertauscht, so erhält man wieder eine richtige Proportion.

Voraussetzung: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$.

Behauptung: 1. $\frac{d}{b} = \frac{c}{a}$; 2. $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$.

Beweis: Multipliziert man die Voraussetzung mit $\frac{d}{a}$, so erhält man Behauptung 1, multipliziert man mit $\frac{b}{c}$, so erhält man Behauptung 2.

Zahlenbeispiel: Aus $\frac{3}{4} = \frac{9}{12}$ folgt 1. $3 \cdot 12 = 4 \cdot 9$

2. $\frac{12}{4} = \frac{9}{3}$; 3. $\frac{3}{9} = \frac{4}{12}$.

Außer den eben bewiesenen beiden Lehrsätzen merke man noch die folgenden, welche häufig Anwendung finden.

Lehrsatz 3. Stimmen zwei Proportionen in drei entsprechenden Gliedern überein, so sind auch die vierten Glieder einander gleich.

Voraussetzung: $a:b = c:x$ und $a:b = c:y$.

Behauptung: $x = y$.

Beweis: Nach Lehrsatz 1 ist $ax = bc$ und

$ay = bc$, also $ax = ay$ und $x = y$.

Lehrsatz 4. Sind mehrere Brüche (Verhältnisse) einander gleich, so ist eine jede algebraische Summe irgendwelcher Zähler, dividiert durch dieselbe algebraische Summe der dazu gehörenden Nenner, gleich jedem der Brüche.

Voraussetzung: $\frac{a}{a_1} = \frac{b}{b_1} = \frac{c}{c_1} = \frac{d}{d_1} = \cdots$

Behauptung: $\frac{a+b-d}{a_1+b_1-d_1} = \frac{a}{a_1}$.

Beweis: Bezeichnet man den Wert der einander gleichen Brüche durch k, dann ist

$$a = a_1 k$$
$$b = b_1 k$$
$$d = d_1 k$$

Hieraus folgt: $a + b - d = a_1 k + b_1 k - d_1 k$

$= (a_1 + b_1 - d_1)\,k$, also

$$\frac{a+b-d}{a_1+b_1-d_1} = k = \frac{a}{a_1}.$$

Beispiel: Aus $\frac{2}{3} = \frac{4}{6} = \frac{14}{21} = \frac{12}{18}$ folgt $\frac{4+14+12}{6+21+18}$

$= \frac{30}{45} = \frac{2}{3}$.

Ist eine Proportion, oder, was dasselbe ist, eine Gleichung zwischen zwei Brüchen gegeben, z. B.

$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, so kann man zunächst nach Lehrsatz 2 dafür schreiben $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$ und findet dann nach Lehrsatz 4

$$\frac{a+b}{c+d} = \frac{a}{c} \text{ oder } \frac{a-b}{c-d} = \frac{a}{c}.$$

Dies ergibt die neue Proportion

$\frac{a+b}{c+d} = \frac{a-b}{c-d}$, welche durch Vertauschung der inneren Glieder übergeht in

$$\frac{a+b}{a-b} = \frac{c+d}{c-d}.$$

Diese Proportion liefert, wenn wir sie mit der Proportion, von der wir ausgingen, vergleichen, den

Lehrsatz 5. Sind zwei Brüche gleich, so ist die Summe aus Zähler und Nenner, dividiert durch die Differenz aus Zähler und Nenner, bei beiden Brüchen gleich.

Diesen Satz kann man vielfach anwenden, um eine Gleichung schnell und einfach zu lösen. Ist z. B. die Gleichung gegeben

$$\frac{x+3}{x-3} = \frac{5}{4},$$

so folgt daraus sofort $\frac{2x}{6} = \frac{9}{1}$, $x = 27$.

§ 25. Gleichungen mit zwei Unbekannten. Die Funktion.

Es kann vorkommen, daß in einer Gleichung mehr als eine Unbekannte, etwa zwei Unbekannte, vorhanden sind, wie z. B. in der Gleichung $y - 2x = 3$. Es ist dann unmöglich, aus dieser einen Gleichung die Werte der Unbekannten zu bestimmen. Nur so viel sieht man ein, daß durch diese eine Gleichung eine gewisse Abhängigkeit der beiden Größen x und y voneinander ausgedrückt wird. Wenn nämlich die eine der beiden Größen, etwa x, einen ganz willkürlich gewählten Wert erhält, so muß die andere Größe y einen ganz bestimmten Wert, der vollständig abhängig ist von dem willkürlich gewählten Werte für x, annehmen. Man sieht ferner, daß, wenn x eine Reihe ganz willkürlich gewählter Werte durchwandert, y eine andere Reihe hierdurch vollständig bestimmter Werte durchwandern muß.

Wenn man in der angedeuteten Weise die Gleichung $y - 2x = 3$ auffaßt, so sind x und y nicht mehr als unbekannte und zu ermittelnde bestimmte Größen (konstante Größen) aufzufassen, sondern als veränderliche Größen oder Variable. Die Größe x, der man beliebige Werte zu geben pflegt, nennt man die unabhängig veränderliche Größe und die Größe y, für welche man darauf die durch den Wert des x bestimmten Werte ermittelt, die abhängig veränderliche Größe oder eine Funktion von x. Eine veränderliche Größe heißt also eine Funktion einer zweiten, wenn jede Änderung dieser zweiten Größe auch eine Änderung bei ihr bedingt. So ist z. B. die Strecke, die ein Körper gefallen ist, eine Funktion der Zeit, die er gebraucht hat, um sie zu durchfallen.

Man kann sich von der Abhängigkeit des y von dem x in unserer Gleichung $y - 2x = 3$ ein Bild verschaffen durch eine Tabelle, indem man auf der linken Seite eines vertikalen Striches die willkürlichen Werte des x und daneben auf der rechten Seite die hieraus berechneten Werte des y schreibt.

x	y
0	+ 3
+ 1	+ 5
+ 2	+ 7
+ 3	+ 9

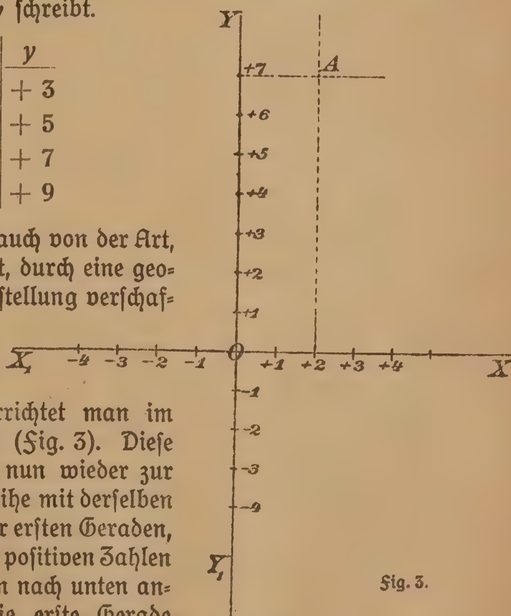


Fig. 3.

Man kann sich aber auch von der Art, wie y von x abhängig ist, durch eine geometrische Figur eine Vorstellung verschaffen. Auf der Geraden (Fig. 2), welche uns die Reihe der algebraischen Zahlen versinnlichte, errichtet man im Nullpunkt die Senkrechte (Fig. 3). Diese Senkrechte benutzt man nun wieder zur Darstellung der Zahlenreihe mit derselben Längeneinheit wie auf der ersten Geraden, aber in der Weise, daß die positiven Zahlen nach oben, die negativen nach unten angenommen werden. Die erste Gerade nennt man in diesem Falle die Abszissenachse oder x-Achse, die zweite die Ordinatenachse oder y-Achse. Die beiden Achsen bilden

zusammen ein **rechtwinkliges Koordinatensystem.** Gibt man jetzt dem x einen beliebigen Wert, z. B. $+ 2$, und zieht durch denjenigen Punkt der Abszissenachse, welcher diesem Werte entspricht, die Parallele zur Ordinatenachse, berechnet darauf aus der gegebenen Gleichung den zugehörigen Wert von y, hier $+ 7$, und zieht durch denjenigen Punkt der Ordinatenachse, welcher diesem Zahlenwert entspricht, die Parallele zur Abszissenachse, so bestimmen diese beiden Parallelen durch ihren Schnittpunkt eindeutig einen Punkt A der Ebene (Fig. 3). Bestimmt man in dieser Weise für beliebig viele Werte von x und die zu ihnen gehörenden Werte von y die Schnittpunkte, so bilden die einzelnen Punkte, miteinander verbunden, eine Linie, die uns durch ihren Verlauf ein Bild von der Abhängigkeit des y von dem x gibt, und die man die durch die Gleichung dargestellte Linie nennt. Zeichnen wir für unsere Gleichung mit Benutzung der obigen Tabelle einige Punkte (Fig. 4) und verbinden dieselben, so gewinnen wir die Überzeugung, daß die durch die Gleichung $y = 2x + 3$ dargestellte Linie eine Gerade sein müsse. Es läßt sich beweisen, daß dies richtig ist. Wir fanden für $x = + 2$ den Wert $y = + 7$ und hierdurch den Punkt A (Fig. 3). Lassen wir jetzt x um a wachsen, so wird $y = 2 (2 + a) + 3 = 4 + 2a + 3 = 7 + 2a$. Es wächst also y um $2a$. Der durch diese beiden Werte bestimmte Punkt sei B (Fig. 5). Ein nochmaliges Wachsen von x um a bedingt, wie man sich leicht überzeugt, wieder ein Wachsen von y um $2a$. Der hierdurch gefundene Punkt sei C. Verbinden wir jetzt B mit A und C durch Gerade, so sind die Dreiecke ADB und BEC kongruent, weil sie in zwei Seiten und dem eingeschlossenen rechten Winkel übereinstimmen. Mithin ist $\angle CBE = \angle BAD$, und da $\angle BAD$ und $\angle ABD$ zusammen einen Rechten betragen, so muß auch $\angle CBE$ und $\angle ABD$ zusammen gleich einem Recht sein (Grundsatz III). Es betragen also die drei Winkel $\angle ABD$ und $\angle DBE$ und $\angle CBE$ zu-

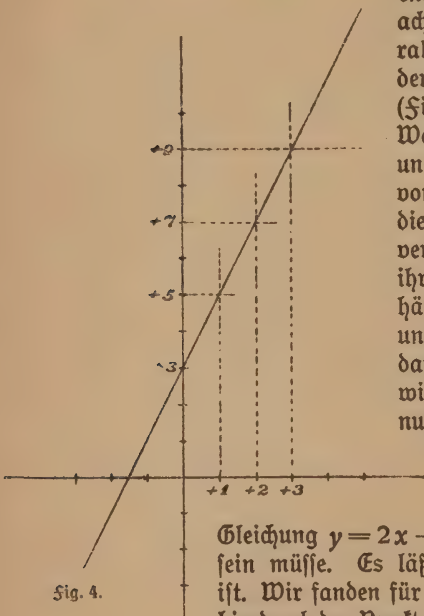


Fig. 4.

sammen zwei Rechte, d. h. die Verbindungslinien von B mit A und C bilden eine Gerade. Läßt man jetzt x nicht um a, sondern um $\frac{a}{2}$ wachsen, so kommt man zunächst auf einen Punkt F (in der Figur nicht vorhanden), dann aber wieder auf Punkt B, und es läßt sich nun in derselben Weise wie oben zeigen, daß A, F und B in einer Geraden liegen müssen. Demnach liegen A, F, B und C in einer Geraden. In dieser Weise läßt es sich, indem man x um $\frac{a}{n}$ wachsen läßt, wo n irgendeine Zahl sein kann, für beliebig viele Punkte der durch die Gleichung $y = 2x + 3$ dargestellten Linie nachweisen, daß sie in einer Geraden liegen müssen. Die durch unsere Gleichung dargestellte Linie muß also eine Gerade sein.

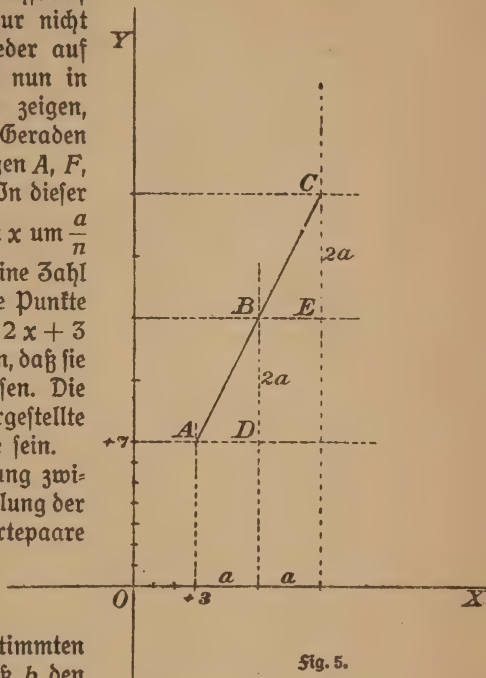


Fig. 5.

Bringt man die Gleichung zwischen x und y vor der Ermittlung der zusammengehörenden Wertepaare von x und y auf die Form $y = ax + b$, so erkennt man, nachdem man für einige Gleichungen die durch sie bestimmten Geraden gezeichnet hat, daß b den Punkt angibt, in welchem die Gerade die Ordinatenachse schneidet, und a die Größe, um welche y wächst, wenn x um die Einheit zunimmt.

Tritt zu der Gleichung $y = 2x + 3$ noch eine zweite Gleichung, etwa $y = 3x + 2$, so stellen diese beiden Gleichungen zwei Gerade dar. Zwei Gerade bestimmen durch ihren Durchschnittspunkt eindeutig einen Punkt der Ebene. Die Werte von x und y, welche zu diesem Punkte gehören, und nur diese Werte genügen beiden Gleichungen. Es werden daher zwei Größen x und y eindeutig durch zwei Gleichungen ersten Grades, die zwischen beiden bestehen, bestimmt. Faßt man also x und y als Unbekannte auf, deren Werte man ermitteln will, so hat man zwischen ihnen zwei Gleichungen ersten Grades nötig. Wie man aus diesen beiden Gleichungen die Werte der Unbekannten durch Rechnung findet, lehrt der folgende Paragraph.

§ 26. Methoden für die Lösung der Gleichungen mit mehreren Unbekannten.

A. Gleichungen mit zwei Unbekannten.

Es sollen im folgenden nur die beiden wichtigsten Methoden für die Lösung der Gleichungen mit zwei Unbekannten an demselben Beispiel auseinandergesetzt werden. Gegeben sei das Gleichungspaar

$$3x + 7y = 27 \quad \text{(I)}$$
$$5x + 4y = 22 \quad \text{(II)}.$$

Erste Methode: Die Substitutionsmethode oder Einsetzungsmethode.

Man bestimmt aus einer der beiden gegebenen Gleichungen, beliebig welcher, die eine Unbekannte und setzt den für sie gefundenen Wert statt der Unbekannten in die andere Gleichung ein.

Aus (I) folgt $x = \frac{27 - 7y}{3}$.

Setzt man dies in (II) ein, so findet man:

$$5 \cdot \frac{27 - 7y}{3} + 4y = 22$$
$$5(27 - 7y) + 12y = 66$$
$$135 - 35y + 12y = 66$$
$$-23y = -69; \; \boldsymbol{y = 3}.$$

Wenn man diesen Wert für y in die am Anfang für x gefundene Gleichung einsetzt, so erhält man

$$x = \frac{27 - 21}{3} = 2.$$

Zweite Methode der Lösung: Die Methode der gleichen Koeffizienten oder die Additions- und Subtraktionsmethode.

Man multipliziert beide Gleichungen mit solchen Zahlen, daß dadurch die Koeffizienten einer der beiden Unbekannten in beiden Gleichungen denselben absoluten Zahlenwert bekommen. Sind dann die Vorzeichen dieselben, so verschwindet die Unbekannte (wird eliminiert) durch Subtraktion beider Gleichungen; sind die Vorzeichen verschieden, so erreicht man dasselbe durch Addition der Gleichungen. Zur Ermittlung der für die Multiplikation geeignetsten Zahlen bestimmt man für die Koeffizienten derjenigen Unbekannten, welche man fortschaffen will, das kleinste gemeinschaftliche Vielfache.

Wollen wir aus unseren Gleichungen (I) und (II) zunächst y fortschaffen, so finden wir, weil das kleinste gemeinschaftliche Vielfache

der Koeffizienten von y gleich $7 \cdot 4$ ist, daß die erste Gleichung mit 4, die zweite mit 7 multipliziert werden muß. Wir erhalten

$$12x + 28y = 108$$
$$35x + 28y = 154.$$

Durch Subtraktion der oberen Gleichung von der unteren folgt:

$$23x = 46; \; \mathbf{x = 2.}$$

Setzen wir diesen Wert in (I) ein, so finden wir $\mathbf{y = 3.}$

In vielen Fällen führt diese Methode am leichtesten zum Ziele.

Aufgabe 2.
$$11x + 12y = 34$$
$$13x - 18y = \;\; 8.$$

Da das kleinste gemeinschaftliche Vielfache der Koeffizienten von y gleich 36 ist, so hat man, um y zu eliminieren, die erste Gleichung mit 3, die zweite mit 2 zu multiplizieren:

$$33x + 36y = 102$$
$$26x - 36y = \;\; 16.$$

Durch Addition folgt $59x = 118$; $\mathbf{x = 2}$, und durch Einsetzen dieses Wertes $\mathbf{y = 1.}$

Sind die beiden Gleichungen nicht in so einfachen Formen, wie in den obigen Beispielen, gegeben, d. h. nicht in der Form

$$ax + by = c \text{ und } a_1 x + b_1 y = c_1,$$

so muß man sie zunächst in diese Form bringen.

Aufgabe 3.
$$\frac{3x+4y+7}{5x-2y-3} = \frac{19}{7} \qquad \text{(I)}$$

$$\frac{4x+y}{6} - \frac{3x-2y}{4} = x - 2^3/_4. \qquad \text{(II)}$$

Aus (I) findet man $37x - 33y = 53$ und aus (II)

$$13x - \;\; 8y = 33.$$

Hieraus ergibt sich: $\quad x = 5, \; y = 4.$

Aufgabe 4. $\quad \frac{8}{x} + \frac{9}{y} = 5$ (I); $\quad \frac{20}{x} - \frac{12}{y} = 1$ (II).

Bei dieser Aufgabe wäre es nicht praktisch, die Nenner fortzuschaffen, weil dann auf der rechten Seite das Produkt xy auftreten würde. Man löst die Aufgabe am besten, indem man neue Unbekannte einführt durch die Gleichungen:

$$\frac{1}{x} = u \text{ und } \frac{1}{y} = v.$$

Hierdurch erhält man die Gleichungen

$8u + 9v = 5$ und $20u - 12v = 1$, aus denen folgt:

$u = \frac{1}{4}$ und $v = \frac{1}{3}$, also ist $x = 4$ und $y = 3$.

Man hätte in dieser Aufgabe auch $\frac{4}{x} = u$ und $\frac{3}{y} = v$ setzen können und wäre auf die Gleichungen gekommen:

$$2u + 3v = 5 \text{ und } 5u - 4v = 1.$$

Weitere Aufgaben.

1. $\frac{1}{2}(x - 4) - \frac{1}{3}(y - 4) = y - x$; $\frac{1}{5}(x + 3) - \frac{1}{7}(y + 1) = y - x$. $(x = 12, y = 13)$.
2. $(x - 7)^2 + (y + 7)^2 = x^2 + y^2$; $(x - 2)^2 - (3y + 1) = x(x - 5)$. $(x = 12, y = 5)$.
3. $(x - 4)(y + 3) - (x + 2)(y - 6) = 3$; $(x + 1)(y - 2) - (x - 3)(y - 4) = 24$. $(x = 5, y = 7)$.

Bemerkung. Man nennt vielfach noch eine dritte Methode: die Gleichsetzungsmethode. Bei Anwendung dieser Methode bestimmt man aus jeder der beiden gegebenen Gleichungen dieselbe Unbekannte und setzt dann die für sie gefundenen Werte einander gleich. Hierdurch erhält man eine Gleichung für die zweite Unbekannte.

B. Gleichungen mit mehr als zwei Unbekannten.

Zur Bestimmung von drei Unbekannten hat man drei Gleichungen zwischen denselben nötig, die vollständig voneinander unabhängig sein müssen, so daß man nicht die eine von ihnen auf irgendeine Weise aus den beiden anderen herleiten kann. Die drei gegebenen Gleichungen werden dann jede auf die Form

$$ax + by + cz = d$$

gebracht, und dann werden in derselben Weise, wie man aus zwei Gleichungen mit zwei Unbekannten eine Gleichung mit einer Unbekannten bildete, aus den drei gegebenen Gleichungen zwei Gleichungen mit zwei Unbekannten gebildet. Die so gefundenen Gleichungen werden dann nach einer der oben angegebenen Methoden behandelt. Ein Beispiel soll dies klar machen.

Aufgabe:

$$3x + 2y - z = 8 \quad \text{(I)}$$
$$2x - 3y + 5z = 15 \quad \text{(II)}$$
$$4x + 5y + 2z = 31 \quad \text{(III)}.$$

Multipliziert man (I) mit 5 und addiert die erhaltene Gleichung zu (II), so findet man
$$17x + 7y = 55 \qquad \text{(IV)}.$$
Multipliziert man (I) mit 2 und addiert die erhaltene Gleichung zu (III), so findet man
$$10x + 9y = 47 \qquad \text{(V)}.$$
(IV) und (V) sind jetzt die gewünschten Gleichungen mit zwei Unbekannten.

Multipliziert man (IV) mit 9 und (V) mit 7 und subtrahiert die erhaltenen Gleichungen, so ergibt sich
$$83x = 166; \qquad \boldsymbol{x = 2}.$$
Setzt man diesen Wert für x in (IV) oder (V) ein, so findet man $\boldsymbol{y = 3}$. Werden nun die beiden für x und y gefundenen Werte in (I), (II) oder (III) eingesetzt, so findet man $\boldsymbol{z = 4}$.

In ähnlicher Weise werden auch Gleichungen mit mehr als drei Unbekannten gelöst.

Weitere Aufgaben.

1. $2x - y + 3z = 38;\ x + 3y - 4z = 10;\ 5x - 2y + z = 48$.
   ($x = 12$, $y = 10$, $z = 8$).
2. $8x - 3y + 2z = 58;\ 3x + 5y - 6z = 7;\ 4x - 2y + 3z = 36$.
   ($x = 7$, $y = 2$, $z = 4$).

§ 27. Eingekleidete Gleichungen (Textgleichungen).

Ist eine Gleichung zur Ermittlung einer Unbekannten nicht unmittelbar gegeben, sondern die Aufgabe, daß eine unbekannte Größe ermittelt werden soll, in Worten gestellt, so verfährt man am besten folgendermaßen. Man bezeichnet zunächst die gesuchte unbekannte Größe durch x. Hierauf sucht man mit Hilfe von x eine aus der Aufgabe näher zu ermittelnde Größe auf doppelte Weise auszudrücken. Die beiden für dieselbe Größe gefundenen Ausdrücke geben dann, wenn sie einander gleichgesetzt werden, die zur Bestimmung von x brauchbare Gleichung. Das Gesagte soll im folgenden an Beispielen erläutert werden.

Aufgabe 1. *A* ist jetzt 6 Jahre alt, *B* 34 Jahre. Nach wieviel Jahren wird *B* dreimal so alt sein wie *A*?

Lösung. Nach x Jahren sei *B* dreimal so alt wie *A*. Dann ist *A* $(6 + x)$ Jahre alt und *B* $(34 + x)$ Jahre alt. Doppelt ausdrückbar ist für diesen Zeitpunkt das Alter des *B*.

1. $(34 + x)$ Jahre; 2. $3 \cdot (6 + x)$ Jahre.

Hierdurch erhält man die Gleichung

$$3(6 + x) = 34 + x,$$

aus welcher $x = 8$ folgt. In 8 Jahren ist also B dreimal so alt als A.

Aufgabe 2. A ist jetzt 17 Jahre alt, und B 57 Jahre. Nach wieviel Jahren ist B fünfmal so alt als A?

Lösung. Man findet in ähnlicher Weise wie bei Aufgabe 1 $x = -7$. Dieses negative Resultat bedeutet, daß B bereits vor 7 Jahren fünfmal so alt war als A.

Aufgabe 3. A und B sind zusammen 45 Jahre alt, und vor 5 Jahren war A viermal so alt als B. Wie alt sind A und B jetzt?

Bemerkung. Ist von zwei unbekannten Größen die Summe s, die Differenz d, das Produkt p oder der Quotient q bekannt, so hat man nicht nötig, zwei Unbekannte einzuführen. Nennt man die eine Unbekannte x, dann ist in den obigen vier Fällen die andere

$$s - x,\ d + x,\ \frac{p}{x},\ qx.$$

Lösung. A sei jetzt x Jahre alt, dann ist B $(45 - x)$ Jahre alt, vor 5 Jahren war A $(x - 5)$ Jahre alt und B $(45 - x - 5)$ Jahre $= (40 - x)$ Jahre. Doppelt ausdrückbar ist für diesen Zeitpunkt das Alter des A.

1. $(x - 5)$ Jahre; 2. $4(40 - x)$ Jahre.

Man erhält demnach die Gleichung:

$$x - 5 = 4(40 - x).$$

Aus dieser folgt: $x = 33$. Es ist also A 33 Jahre und B 12 Jahre alt.

Aufgabe 4. A und B sind 153 Meilen voneinander entfernt und reisen einander entgegen. A legt täglich 4 Meilen, B täglich 5 Meilen zurück. Nach wieviel Tagen treffen sie zusammen?

Lösung. Sie treffen sich nach x Tagen. In diesen x Tagen hat A $4x$ Meilen, B $5x$ Meilen zurückgelegt. Doppelt ausdrückbar ist die Anzahl der Meilen, welche beide in den x Tagen zurücklegen:

1. $(4x + 5x)$ Meilen; 2. 153 Meilen.

Es entsteht die Gleichung: $3x + 5x = 153$. $(x = 17)$.

Aufgabe 5. Von einem Orte geht ein Bote ab, der täglich 4 Meilen zurücklegt. 9 Tage nach seiner Abreise wird ihm ein zweiter Bote auf demselben Wege nachgeschickt, der täglich 11,2 Meilen zurücklegt. In wieviel Tagen holt dieser den ersten Boten ein?

Lösung. Er holt ihn in x Tagen ein; dann ist an dem Tage, an dem sie sich treffen, der erste Bote $(x + 9)$ Tage unterwegs,

und der erste Bote hat $(x + 9) \cdot 4$ Meilen, der zweite $11{,}2 \cdot x$ Meilen zurückgelegt. Doppelt ausdrückbar ist der von beiden zurückgelegte Weg:

1. $(x + 9) \cdot 4$ Meilen; 2. $11{,}2 \cdot x$ Meilen.

Es entsteht die Gleichung:

$$11{,}2x = (x + 9) \cdot 4. \qquad (x = 5).$$

Aufgabe 6. Ein Kapital von 6000 *M* steht teils zu $3^1/_2\%$, teils zu 4% auf Zinsen. Die jährlichen Zinsen betragen 226,50 *M*. Wie groß sind die beiden Teile des Kapitals?

Lösung. Der zu $3^1/_2\%$ ausgeliehene Teil betrage x *M*, dann ist der andere Teil $(6000 - x)$ *M* groß Der erste Teil bringt jährlich $\frac{7x}{2 \cdot 100}$ *M* Zinsen, der zweite Teil $\frac{(6000 - x) \cdot 4}{100}$ *M*. Doppelt ausdrückbar ist die Summe der Zinsen beider Teile:

1. $\frac{7x}{2 \cdot 100} + \frac{(6000 - x) \cdot 4}{100}$ *M*. 2. 226,50 *M*.

Es entsteht die Gleichung:

$$\frac{7x}{2 \cdot 100} + \frac{(6000 - x) \cdot 4}{100} = 226{,}50. \qquad (x = 2700).$$

Aufgabe 7. Eine Arbeit wird von A in 5 Stunden, von B in 4 Stunden, von C in 20 Stunden vollendet. In wieviel Stunden wird sie vollendet, wenn alle drei gemeinsam arbeiten?

Lösung. In x Stunden. Da A in 5 Stunden die ganze Arbeit leistet, so leistet er in 1 Stunde $\frac{1}{5}$ der Arbeit und in x Stunden $\frac{x}{5}$ der Arbeit. Ähnlich findet man, daß B in x Stunden $\frac{x}{4}$ und C in x Stunden $\frac{x}{20}$ der Arbeit leistet. Doppelt ausdrückbar ist das, was sie bei gemeinsamer Arbeit in x Stunden leisten:

1. $\frac{x}{5} + \frac{x}{4} + \frac{x}{20}$ der Arbeit. 2. $\frac{1}{1} = 1$ der Arbeit.

Es entsteht die Gleichung:

$$\frac{x}{5} + \frac{x}{4} + \frac{x}{20} = 1. \qquad (x = 2.)$$

Aufgabe 8. Bei einer sechsziffrigen Zahl heißt die erste Ziffer 2, wird diese an das Ende gestellt, so erhält man das Dreifache der ersten Zahl. Wie heißt die Zahl?

Bemerkung. Sind bei einer dreiziffrigen Zahl die drei Ziffern von links nach rechts x, y und z, so heißt die Zahl $100x + 10y + z$

und ihre Quersumme $x + y + z$. Die Zahl mit denselben Ziffern, aber in umgekehrter Folge geschrieben, heißt $100z + 10y + x$. — Bezeichnet man bei einer dreiziffrigen Zahl die erste Ziffer durch x, die beiden letzten durch y, so heißt die Zahl $100x + y$; setzt man die erste Ziffer x an das Ende, so heißt die Zahl $10y + x$.

Lösung. Die fünf letzten Ziffern der Zahl seien x, dann heißt die Zahl $200000 + x$ und nach der Umstellung $10x + 2$. Doppelt ausdrückbar ist die Zahl nach der Umstellung:

1. $10x + 2$. 2. $3 \cdot (200000 + x)$.

Es entsteht die Gleichung:

$10x + 2 = 3 \cdot (200000 + x)$. ($x = 85714$, die Zahl ist 285714).

Aufgabe 9. Wenn man eine gewisse Zahl durch 7 dividiert, zum Quotienten 12 addiert und dann an die erhaltene Summe eine 8 anhängt, so erhält man das Sechsfache der ursprünglichen Zahl. Wie heißt dieselbe?

Bemerkung. Hängt man an eine Zahl, z. B. 36, hinten eine 7 an, so bedeutet dies, daß man die Zahl mit 10 multipliziert und zu dem Produkt 7 addiert hat; hängt man 75 an, so bedeutet dies, daß man mit 100 multipliziert und zu dem Produkt 75 addiert hat.

Lösung. Die Zahl sei x, dann ist der Quotient, den man erhält, wenn man sie durch 7 dividiert, $\frac{x}{7}$, addiert man hierzu 12, so bekommt man $\frac{x}{7} + 12$, hängt man hieran eine 8, so ist das Ergebnis $\left(\frac{x}{7} + 12\right) \cdot 10 + 8$. Doppelt ausdrückbar ist das Sechsfache der gesuchten Zahl:

1. $6x$. 2. $\left(\frac{x}{7} + 12\right) \cdot 10 + 8$. ($x = 28$.)

Aufgabe 10. Jemand will eine Anzahl von Äpfeln unter seine Kinder verteilen. Gibt er jedem Kinde 5 Äpfel, so bleiben 3 Äpfel übrig, will er aber jedem Kinde 6 Äpfel geben, so hat er einen Apfel zu wenig. Wieviel Kinder und wieviel Äpfel waren es?

Lösung. Es waren x Kinder. Diese bekommen bei der ersten Art der Verteilung $5x$ Äpfel; da dann 3 Äpfel übrig bleiben, so sind es $(5x + 3)$ Äpfel. Bei der zweiten Art der Verteilung bekämen die Kinder $6x$ Äpfel; da dann ein Apfel fehlt, so sind es $(6x - 1)$ Äpfel. Doppelt ausdrückbar ist die Anzahl der Äpfel:

1. $(5x + 3)$ Äpfel. 2. $(6x - 1)$ Äpfel.

(4 Kinder und 23 Äpfel.)

§ 28. Zahlensysteme. Unsere Rechenmethoden.

Die Griechen und Römer hatten beim Rechnen mit Zahlen große Schwierigkeiten. Es lag dies an der Art, wie sie die Zahlen schrieben. Die Griechen verwendeten für dieselben die Buchstaben des Alphabets mit einem Strich rechts oben, also α', β', γ' usw. Die Römer bezeichneten die ersten vier Zahlen durch so viel vertikale Striche, als die Zahl Einheiten besaß: I, II, III, IIII. Für die Zehn benutzten sie das Zeichen X, welches vielleicht zwei kreuzweis übereinander gelegte Hände (10 Finger) darstellen soll. Für die Bezeichnung der beiden nächsten Potenzen von 10 verwendeten sie die Anfangsbuchstaben ihrer lateinischen Namen centum und mille, also C und M, oder, wie es in alten Schriften geschrieben wird, ↀ. Indem sie die Zeichen für 10 und 100 durch einen horizontalen Strich, das Zeichen für 1000 durch einen vertikalen Strich halbierten (⚹, ⲈE, ↀ), erhielten sie als Zeichen für 5 den oberen Teil der X, also V, als Zeichen für 50 den unteren Teil des C, also L, und als Zeichen für 500 den rechten Teil des durchstrichenen ↀ, also D. Mit diesen Zeichen schrieben die Römer in der bekannten Weise ihre Zahlen. Diese Bezeichnung war für das Rechnen höchst unpraktisch.

Unsere Zahlen sind Summen von Potenzen der Grundzahl 10, und die Ziffern, die wir schreiben, die Koeffizienten dieser Potenzen. Es ist

$$3782 = 3 \cdot 10^3 + 7 \cdot 10^2 + 8 \cdot 10 + 2,$$

also eine Summe etwa wie $5a^3 + 7a^2 + 3a + 4$.

Da es sich nun bei den einzelnen Summanden der Summen, die unsere Zahlen darstellen, stets um Vielfache derselben Potenzen handelt, so kann man diese Potenzen auch fortlassen und durch die Stellung, die man den Koeffizienten gibt, andeuten, mit welcher Potenz der Grundzahl man zu tun hat. Man gibt den 9 Ziffern einen Stellenwert, von rechts nach links steigend. Steht 7 an zweiter Stelle von rechts nach links, so hat sie den Wert $7 \cdot 10 = 70$, steht sie aber an vierter Stelle, den Wert $7 \cdot 10^3 = 7000$. Um diese Schreibweise durchführen zu können, bedurfte man für den Fall, daß eine Potenz der Grundzahl ganz ausfiel, eines Zeichens, um dies anzudeuten. Die Inder erfanden hierfür das Zeichen *O* (ein Kreis ohne Mittelpunkt), das sie ziffra, d. h. Nichts nannten. Hieraus ist unsere Null (lat. nullus, frz. zéro) entstanden.

Unter Abdallah Almamun, dem Sohne Harun al Raschids, des Zeitgenossen Karls des Großen, blühten die mathematischen Wissenschaften bei den Arabern zu Bagdad, Damaskus, Cordova. Sie führten

den Stellenwert der Ziffern und die indischen Zahlenzeichen bei uns ein, die daher von uns arabische Ziffern genannt werden.

Da die Zahlen Summen von Potenzen sind, und Potenzen nur addiert oder subtrahiert werden können, wenn sie in Grundzahl und Exponent übereinstimmen, so erklärt sich daraus die Notwendigkeit, die Zahlen beim Addieren und Subtrahieren so untereinander zu schreiben, wie wir es machen.

Die Multiplikation unserer Zahlen muß erfolgen nach der Regel, wie man Summen mit Summen multipliziert (§ 14). Da hierbei die Glieder in den Summen nicht geordnet zu sein brauchen, so kann man bei der Multiplikation verschiedene Methoden anwenden. Man kann mit der letzten Ziffer des Multiplikators beginnen oder mit der ersten (österreichische Methode), selbst die einzelnen Ziffern des Multiplikators in ganz beliebiger Reihenfolge nehmen, nur muß man darauf achten, daß stets solche Ziffern, welche die Koeffizienten gleich hoher Potenzen von 10 darstellen, untereinander geschrieben werden.

$$523 \cdot 412 = (5 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10 + 3) \cdot (4 \cdot 10^2 + 1 \cdot 10 + 2).$$

523 · 412	523 · 412	523 · 412
1046	2092	523
523	523	2092
2092	1046	1046
215476	215476	215476

Die Division kann nur nach dem Schema, das in § 17 genauer erklärt ist, ausgeführt werden.

Die Zahlen könnten auch als Summen von Potenzen irgendeiner anderen Zahl als der Zehn gebildet sein. Man spricht daher von verschiedenen Zahlensystemen. Die Neuseeländer haben ein Undezimalsystem (Grundzahl 11), die Azteken in Mexiko hatten ein Vigesimalsystem (Grundzahl 20), die Chaldäer benutzten das Sexagesimalsystem (Grundzahl 60). Daß das dezimale Zahlensystem (Grundzahl 10), welches wir haben, das verbreitetste ist, beruht darauf, daß wir 10 Finger haben.

Würde man die 5 als Grundzahl eines Zahlensystems annehmen, so brauchte man zum Schreiben der Zahlen nur die vier Ziffern 1, 2, 3, 4 und die Null. Es würde dann die mit den Ziffern 342 geschriebene Zahl die Summe $3 \cdot 5^2 + 4 \cdot 5 + 2$ darstellen, d. h. 97 Einheiten bezeichnen.

Es ist auch leicht möglich, jede Zahl unseres Zahlensystems in eine Zahl irgendeines anderen Systems umzurechnen.

Aufgabe. 444 in eine Zahl des Systems nach der Grundzahl 7 umzurechnen.

Es kommt darauf an, 444 in eine Summe von Potenzen der Zahl 7 zu verwandeln. Die ersten Potenzen von 7 sind $7^1 = 7$, $7^2 = 49$, $7^3 = 343$. Nur diese drei Potenzen kommen in Betracht, da 7^4 bereits größer als 444 ist. Die Umrechnung gestaltet sich nun wie folgt. Man dividiert zunächst 444 durch 7^3 oder 343, dies gibt 1 als Quotient und 101 als Rest. Also steckt in 444 zunächst $1 \cdot 7^3$. Der Rest 101 wird durch 7^2 oder 49 dividiert, dies gibt 2 als Quotient und 3 als Rest. Also steckt in 444 noch $2 \cdot 7^2$. Da der Rest 3 durch 7 dividiert 0 als Quotient und 3 als Rest gibt, so stellt er sich dar als $0 \cdot 7^1 + 3$. Die Zahl 444 lautet demnach in dem Siebensystem

$$1 \cdot 7^3 + 2 \cdot 7^2 + 0 \cdot 7^1 + 3,$$

oder, wenn man den Stellenwert benutzt: 1203.

$$\begin{array}{l} \text{Schema: } 444 : 343 = 1 \\ \quad\;\; \underline{343} \\ \quad\;\; 101 : 49 = 2 \\ \quad\;\;\; \underline{98} \\ \quad\;\;\;\; 3 : 7 = 0 \\ \quad\;\;\;\; \underline{0} \\ \quad\;\;\;\; 3 \end{array}$$

Man hüte sich aber, die gefundene Zahl etwa „eintausendzweihundert und drei" auszusprechen. Man darf nur sagen, daß in einem Zahlensystem nach der Grundzahl 7, in welchem zum Schreiben der Zahlen nur die Ziffern 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 nötig wären — denn 7 Einheiten würden dann schon durch 10 bezeichnet werden müssen — eine aus 444 Einheiten bestehende Zahl geschrieben werden würde 1203.

Die Unmöglichkeit für uns, die oben gefundene Zahl auszusprechen, gibt uns auch den Grund an, weshalb andere Zahlensysteme, selbst wenn sie praktischer sein sollten als das unsrige, für uns keine Bedeutung haben können: Die Zahlwörter der Kultursprachen beruhen auf dem Dezimalsystem.

Zweiter Abschnitt.

Die Potenzierung und ihre Umkehrungen. Quadratische Gleichungen.

Die Potenzierung. (Zweiter Teil.)

§ 29. Die Umkehrungen der früheren Lehrsätze.

Der Begriff der Potenz ist im § 13, 1 erklärt worden. Wir wissen auch, wie Potenzen addiert und subtrahiert (§ 13, 2), multipliziert (§ 13, 3), dividiert (§ 16, 4) und potenziert (§ 13, 5) werden können. Es handelt sich nun darum, unsere Kenntnisse von der Potenzierung etwas zu erweitern. Zunächst gelten die Umkehrungen der vorher erwähnten Lehrsätze.

I. Umkehrung des Satzes von der Multiplikation zweier Potenzen.

Formel: $a^{m+n} = a^m \cdot a^n$.

Lehrsatz: Statt mit einer Summe zu potenzieren, darf man die Grundzahl mit den Summanden einzeln potenzieren und die erhaltenen Potenzen miteinander multiplizieren.

Beispiele:

$$a^{10} = a^{8+2} = a^8 \cdot a^2$$
$$a^{10} = a^{7+3} = a^7 \cdot a^3$$
$$a^{10} = a^{6+4} = a^6 \cdot a^4 \text{ usw.}$$

II. Umkehrung des Satzes von der Division zweier Potenzen.

Formel: $a^{m-n} = \frac{a^m}{a^n}$.

Lehrsatz: Statt mit einer Differenz zu potenzieren, darf man die Grundzahl mit dem Minuendus und dem Subtrahendus einzeln potenzieren und die zuerst genannte Potenz durch die andere dividieren.

Beispiele:

$$a^{3x-5y} = \frac{a^{3x}}{a^{5y}}$$
$$a^{10} = a^{12-2} = \frac{a^{12}}{a^2}$$
$$a^{x-y+z} = \frac{a^x \cdot a^z}{a^y}.$$

III. Umkehrung des Satzes von der Potenzierung einer Potenz.

Formel: $a^{nm} = (a^n)^m = (a^m)^n$.

Lehrsatz: Statt mit einem Produkt zu potenzieren, darf man mit den Faktoren des Produktes nacheinander in beliebiger Folge potenzieren.

Beispiele:

$$a^{2x} = (a^2)^x = (a^x)^2.$$
$$a^{15} = (a^3)^5 = (a^5)^3.$$
$$3^8 = (3^4)^2 = 81^2 = 6561.$$

§ 30. Die Anwendung der Potenzierung auf die Ergebnisse der vier ersten Rechnungsarten.

I. Lehrsatz über die Potenzierung eines Produktes. Statt ein Produkt (vgl. § 13, 4) zu potenzieren, darf man die Faktoren einzeln potenzieren und die erhaltenen Potenzen miteinander multiplizieren.

Formel: $(ab)^n = a^n \cdot b^n$.

Beweis: Nach der Erklärung der Potenz ist

$$(ab)^n = ab \cdot ab \cdot ab \cdots (n \text{ Faktoren})$$
$$= a \cdot a \cdot a \cdots (n \text{ Faktoren}) \cdot b \cdot b \cdot b \cdots (n \text{ Faktoren})$$
$$= a^n \cdot b^n.$$

Beispiele:

$$(3a^3)^2 = 3^2 \cdot (a^3)^2 = 9a^6$$
$$(2a^7b^4)^5 = 32a^{35}b^{20}.$$

Die Umkehrung dieses Lehrsatzes $a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$ sagt, daß man, statt zwei Potenzen mit demselben Exponenten zu multiplizieren, auch das Produkt der Grundzahlen mit dem gemeinschaftlichen Exponenten potenzieren darf.

Beispiele: $2^2 \cdot 5^2 = 10^2 = 100$; $(a^2)^3 \cdot (a^5)^3 = (a^7)^3 = a^{21}$.

II. Lehrsatz über die Potenzierung eines Quotienten (Bruches). Statt einen Bruch zu potenzieren, darf man Zähler und Nenner einzeln potenzieren und die Potenz des Zählers durch die des Nenners dividieren.

Formel: $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$.

Beweis: Nach der Erklärung der Potenz ist

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a}{b}\cdot\frac{a}{b}\cdot\frac{a}{b}\cdots(n \text{ Faktoren})$$
$$= \frac{a\cdot a\cdot a\cdots(n \text{ Faktoren})}{b\cdot b\cdot b\cdots(n \text{ Faktoren})}$$
$$= \frac{a^n}{b^n}.$$

Beispiele: $\left(\frac{2a^2}{3b^4}\right)^3 = \frac{8a^6}{27b^{12}}$; $\left(\frac{a-b}{4a^2}\right)^2 = \frac{a^2-2ab+b^2}{16a^4}$.

Die Umkehrung dieses Lehrsatzes $\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$ sagt, daß man, statt zwei Potenzen mit demselben Exponenten zu dividieren, auch den Quotienten der Grundzahlen mit dem gemeinsamen Exponenten potenzieren darf.

Beispiele: $\frac{20^3}{5^3} = 4^3 = 64.$

$$\frac{(6a^3)^2}{(2a)^2} = \left(\frac{6a^3}{2a}\right)^2 = (3a^2)^2 = 9a^4.$$

III. Die Potenzierung einer Summe oder Differenz. Ein allgemeiner Lehrsatz für die Potenzierung einer Summe $(a+b)$ oder einer Differenz $(a-b)$, also ein Wert für $(a+b)^n$ oder $(a-b)^n$, läßt sich auf dieser Stufe nicht angeben. Den allgemein gültigen Ausdruck für $(a \mp b)^n$ liefert später der binomische Lehrsatz, jetzt genügt es, sich folgende Formeln für einzelne besondere Fälle einzuprägen:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$
$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 \text{ (vgl. § 15)}$$
$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$
$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$
$$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$
$$(a-b)^4 = a^4 - 4a^3b + 6a^2b^2 - 4ab^3 + b^4.$$

Von der Richtigkeit dieser Formeln kann man sich leicht durch Multiplikation überzeugen.

Beispiele:

$$(2a^2 + 5b^3)^3 = 8a^6 + 3\cdot 4a^4\cdot 5b^3 + 3\cdot 2a^2\cdot 25b^6 + 125b^9$$
$$= 8a^6 + 60a^4b^3 + 150a^2b^6 + 125b^9.$$
$$(3a^3 - 4a^5)^3 = 27a^9 - 3\cdot 9a^6\cdot 4a^5 + 3\cdot 3a^3\cdot 16a^{10} - 64a^{15}$$
$$= 27a^9 - 108a^{11} + 144a^{13} - 64a^{15}.$$

§ 31. Erweiterung des Potenzbegriffes. Potenzen mit dem Exponenten Null und mit negativen Exponenten.

Wenn man nach dem Lehrsatze über die Division zweier Potenzen von gleicher Grundzahl (§ 16, 4) zwei Potenzen dividiert, deren Exponenten einander gleich sind, wie z. B. $a^3 : a^3$ oder $a^4 : a^4$, so erhält man stets als Resultat a^0. Nun ist aber a^0 nach der im § 13, 1 gegebenen Erklärung der Potenz nicht erklärbar, also widersinnig.

Wollte man nach demselben Lehrsatze eine Potenz durch eine andere dividieren, deren Exponent größer ist als der der ersten Potenz, so würde man stets eine Potenz mit negativem Exponenten erhalten. So wäre

$$\frac{a^3}{a^5} = a^{-2}, \quad \frac{a^2}{a^6} = a^{-4}.$$

Auch eine solche Potenz kann man nach der Erklärung der Potenz nicht erklären und muß sie als widersinnig verwerfen.

Nach diesen Auseinandersetzungen sieht man ein, daß man gezwungen ist, zu dem Satze $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$ die Einschränkung hinzuzufügen, daß er nur gültig sei, wenn $m > n$, in den beiden Fällen aber, wo $m = n$ oder $m < n$, kein brauchbares Resultat liefere.

Wenn man aber die Division $a^3 : a^3$ oder $a^4 : a^4$ einfach ausführt nach § 16, 1, so findet man in beiden Fällen als Ergebnis 1. Trifft man nun die Verabredung, daß die Potenz a^0 nichts anderes bedeuten solle als Eins, definiert man:

Jede Potenz, deren Exponent Null ist, ist gleich Eins,

$$a^0 = 1,$$

so kann man die Einschränkung bei unserem Lehrsatze, daß m nicht gleich n sein dürfe, wieder fallen lassen.

In ähnlicher Weise kann man sich auch für den Wert des Quotienten $\frac{a^3}{a^5}$ einen brauchbaren Ausdruck verschaffen. Es ist

$$\frac{a^3}{a^5} = \frac{a \cdot a \cdot a}{a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a} = \frac{1}{a^2}. \quad (\text{§ 18, Lehrs. 2.})$$

Ebenso findet man

$$\frac{a^2}{a^6} = \frac{a \cdot a}{a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a} = \frac{1}{a^4}.$$

Man kann nun auch die zweite Einschränkung unseres Lehrsatzes, daß m nicht kleiner als n sein dürfe, wieder aufheben, wenn man festsetzt, daß die sonst widersinnige Potenz a^{-2} dasselbe bedeuten solle wie $\frac{1}{a^2}$, daß $a^{-4} = \frac{1}{a^4}$ sein solle.

Auf diese Weise ist man, um dem Lehrsatze über die Division zweier Potenzen allgemeine Gültigkeit zu verschaffen, zu der Einführung von Potenzen mit negativem Exponenten gekommen.

Erklärung: Eine Potenz mit negativem Exponenten ist gleich dem reziproken Wert der ihr entsprechenden Potenz mit positivem Exponenten.

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}.$$

Nach dieser Festsetzung ist es auch möglich, für die Potenz mit negativem Exponenten eine Erklärung zu geben, die der für die Potenz früher gegebenen Erklärung entspricht. Da

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n} = \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{a} \cdot \dots \text{ (n Faktoren)},$$

so kann man sagen:

Erklärung: a^{-n} bedeutet ein Produkt von n Faktoren, deren jeder gleich $\frac{1}{a}$ ist.

Es ist also $3^{-2} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{9}$; $4^{-3} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{64}$.

Jeder algebraische Ausdruck, in welchem Potenzen mit negativen Exponenten vorkommen, kann nach der oben gegebenen Erklärung in einen anderen Ausdruck umgeformt werden, der nur Potenzen mit positiven Exponenten enthält. So ist

$$\frac{a^{-3}b^2}{c^{-4}} = \frac{b^2c^4}{a^3}, \quad \frac{3ab^{-4}}{c^3} = \frac{3a}{b^4c^3}, \quad \left(\frac{a}{b}\right)^{-1} = \frac{1}{\left(\frac{a}{b}\right)^1} = \frac{b}{a}.$$

Hierdurch kann man das Rechnen mit Potenzen mit negativen Exponenten ganz vermeiden. Man kann aber auch mit ihnen nach denselben Regeln rechnen, die für die Potenzen mit positiven Exponenten gelten.

Es ist

$$a^{-m} \cdot a^{-n} = \frac{1}{a^m} \cdot \frac{1}{a^n} = \frac{1}{a^{m+n}} = a^{-m-n}$$

$$\frac{a^{-m}}{a^{-n}} = \frac{a^n}{a^m} = a^{n-m} = a^{-m+n}$$

$$(a^{-n})^p = \left(\frac{1}{a^n}\right)^p = \frac{1}{a^{np}} = a^{-np} \text{ usw.}$$

Man könnte daher das letzte der drei vorhergehenden Beispiele auch folgendermaßen rechnen:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-1} = \frac{a^{-1}}{b^{-1}} = \frac{b}{a}.$$

Die Radizierung.

§ 32. Begriff der Radizierung. Fundamentalsätze.

Die Potenzierung hat, da man bei einer Potenz die Basis nicht mit dem Exponenten vertauschen kann, zwei Umkehrungen. Die eine der Umkehrungen behandelt die Aufgabe, die Grundzahl oder Basis zu ermitteln, wenn die ausgerechnete Potenz und der Exponent gegeben sind. Von dieser soll jetzt die Rede sein.

Man bildete früher Zahlenreihen in der Weise, daß man, von einer beliebigen Zahl ausgehend, diejenigen Zahlen dahinter schrieb, welche man erhielt, wenn man die gewählte Zahl wiederholt mit dieser Zahl selbst multiplizierte. Man bildete also Reihen wie die folgenden:

$$2, 4, 8, 16, 32, 64, \ldots$$

$$3, 9, 27, 81, 243, 729, \ldots$$

Eine solche Reihe enthält, wie wir jetzt sagen, die aufeinanderfolgenden ausgerechneten Potenzen der am Anfang stehenden Zahl, und zwar ist die an dritter Stelle stehende Zahl die dritte Potenz, die an vierter Stelle stehende Zahl die vierte Potenz usw. der Anfangszahl oder Grundzahl. Statt die Zahlen der Reihe auszurechnen, deutete man zuweilen nur die Stelle, an der die Zahl in der Reihe stehen sollte, durch Ziffern neben der Grundzahl an, schrieb also statt 16 nur 2^{IV}, statt 243 nur 3^{V}, hieraus erklärt sich die Schreibweise unserer Potenz.

Da für die Bildung einer solchen Reihe es genügend war, wenn man die am Anfang stehende Zahl kannte, so sagte man, die ganze Reihe entstehe aus der ersten Zahl wie die Pflanze aus ihrer Wurzel, und nannte demgemäß die erste Zahl **die Wurzel** der Reihe.

Man stellte sich nun die Aufgabe, aus einer beliebigen in der Reihe vorkommenden Zahl (ausgerechnete Potenz) und aus der Zahl der Stelle, die sie in der Reihe hatte (Exponent), die Anfangszahl oder die Wurzel (Basis, Grundzahl) zu finden. Man fragte also, wenn wir die Zahl, welche die ausgerechnete Potenz darstellt, mit a bezeichnen und annehmen, daß sie in der fraglichen Reihe an der n^{ten} Stelle stehe: wie heißt die Wurzel derjenigen Reihe, in welcher an der n^{ten} Stelle die Zahl a steht? Die gesuchte Wurzel deutete man symbolisch durch $\sqrt[n]{a}$, gesprochen „n^{te} **Wurzel aus** a“, an. Das Zeichen $\sqrt{\ }$, das „**Wurzelzeichen**“, ist durch eine Umformung des r, des Anfangsbuchstabens des Wortes radix (= Wurzel), entstanden. Man sieht, daß die soeben besprochene Aufgabe dasselbe

ist wie die im Anfang angedeutete Umkehrung der Potenzierung, auch ist es nach dem Gesagten verständlich, weshalb man diese Umkehrung die Wurzelrechnung oder Radizierung genannt hat.

Erklärung: Unter der n^{ten} Wurzel aus a (geschrieben $\sqrt[n]{a}$) versteht man diejenige Zahl, welche mit n potenziert a als ausgerechnete Potenz ergibt.

Die ausgerechnete Potenz a heißt der Radikandus, der gegebene Exponent n der Wurzelexponent.

Es ist hiernach $\sqrt[4]{81} = 3$, denn es ist $3^4 = 81$,

$\sqrt[5]{32} = 2$, denn es ist $2^5 = 32$.

Besteht zwischen drei Zahlen a, b und c die Gleichung $\sqrt[a]{b} = c$, so besteht auch die Gleichung $c^a = b$. Ist $a^b = c$, so muß auch $\sqrt[b]{c} = a$ sein.

Bei der am häufigsten vorkommenden zweiten Wurzel pflegt man den Wurzelexponenten 2 nicht zu schreiben, so daß also $\sqrt{a}$ dasselbe bedeutet wie $\sqrt[2]{a}$, auch pflegt man statt „zweite Wurzel aus a“ zu sagen „Quadratwurzel aus a“.

Ähnlich sagt man zuweilen für $\sqrt[3]{a}$ „Kubikwurzel aus a“.

Fundamentalsätze der Radizierung.

Lehrsatz I. Wenn man eine Wurzel mit ihrem Exponenten potenziert, so erhält man den Radikandus.

Behauptung: $\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a$.

Beweis: $\sqrt[n]{a}$ bedeutet die Zahl, die mit n potenziert a als Potenz ergibt. Hier ist $\sqrt[n]{a}$ mit n potenziert, also muß a das Ergebnis sein.

Lehrsatz II. Wenn man eine Potenz mit ihrem Exponenten radiziert, so erhält man die Grundzahl der Potenz.

Behauptung: $\sqrt[n]{a^n} = a$.

Beweis: $\sqrt[n]{a^n}$ bedeutet die Zahl, die mit n potenziert a^n als Potenz ergibt, dies ist aber a.

§ 33. Das Ausziehen der Quadratwurzel aus einer Zahl.

Das Verfahren, durch welches man für eine gegebene Zahl diejenige Zahl ermittelt, von welcher die gegebene das Quadrat ist, nennt man das Ausziehen der Quadratwurzel aus der gegebenen Zahl.

Es ist
$$1^2 = 1$$
$$10^2 = 100$$
$$100^2 = 10000$$
$$1000^2 = 1000000 \text{ usw.}$$

Demnach ist umgekehrt
$$\sqrt{1} = 1$$
$$\sqrt{100} = 10$$
$$\sqrt{10000} = 100$$
$$\sqrt{1000000} = 1000 \text{ usw.}$$

Da 100 die kleinste dreiziffrige Zahl ist und 10 die kleinste zweiziffrige Zahl, so folgt hieraus, daß die Quadratwurzel aus einer einziffrigen oder zweiziffrigen Zahl einziffrig sein muß. Da 10000 die kleinste fünfziffrige Zahl ist und 100 die kleinste dreiziffrige Zahl, so folgt weiter, daß die Quadratwurzel aus einer drei- oder vierziffrigen Zahl zweiziffrig sein muß. In dieser Weise kann man weiter schließen.

Teilt man also die Zahl, aus welcher die Quadratwurzel gezogen werden soll, von rechts nach links in Gruppen von je zwei Ziffern, wobei es vorkommen kann, daß in der letzten Gruppe links nur eine Ziffer zu stehen kommt, so gibt die Anzahl der Gruppen die Anzahl der Ziffern der gesuchten Wurzel an.

Ist die Quadratwurzel aus 119025 zu ziehen, so finden wir nach der Einteilung in Gruppen 11|90|25, daß das Ergebnis dreiziffrig sein muß. Wir können also
$$\sqrt{11|90|25} = a + b + c$$
setzen, wenn wir unter a eine dreiziffrige Zahl mit 2 Nullen am Ende, unter b eine zweiziffrige Zahl mit einer Null und unter c eine einziffrige Zahl verstehen. Es ist dann
$$119025 = a^2 + 2ab + b^2 + 2(a + b)c + c^2.$$
Da a^2 eine Zahl mit vier Nullen am Ende sein muß, so muß das Quadrat der von Null verschiedenen Ziffer der Zahl a das größte Quadrat sein, das kleiner als 11 ist. Man findet daher $90000 = a^2$ und $a = 300$. Subtrahiert man die Gleichung $90000 = a^2$ von der obigen Gleichung, so bleibt
$$29025 = 2ab + b^2 + 2(a + b)c + c^2.$$

Es muß demnach

$$2ab < 29025$$ sein, oder, wenn man für a den soeben gefundenen Wert einsetzt:

$$600b < 29025,$$
$$b < 29025 : 600,$$
$$b < 48\frac{225}{600}.$$

Da b eine zweiziffrige Zahl mit einer Null am Ende sein muß, so setzt man $b = 40$. Nun bildet man

$$2ab + b^2 = 24000 + 1600 = 25600$$

und subtrahiert diese Gleichung von der zuletzt erhaltenen.

$$\begin{array}{rl} 29025 = & 2ab + b^2 + 2(a+b)c + c^2 \\ 25600 = & 2ab + b^2 \\ \hline 3425 = & \qquad\qquad 2(a+b)c + c^2. \end{array}$$

Es muß demnach

$$2(a+b)c < 3425$$ sein, oder

$$680c < 3425, \text{ und } c < 3425 : 680,$$
$$c < 5\frac{25}{680}.$$

Mithin kann $c = 5$ sein.

Nun bildet man $2(a+b)c + c^2$ 3425, und es bleibt, wenn man dies von der zuletzt erhaltenen Gleichung subtrahiert, kein Rest. Es ist demnach $\sqrt{119025} = 345$. Erhebt man, um die Probe zu machen, 345 in das Quadrat, so findet man auch richtig 119025.

Der Übersicht halber sei das Vorhergehende noch einmal kürzer dargestellt.

$$\sqrt{\overset{300}{11}|\overset{40}{90}|\overset{5}{25}} = a + b + c$$

$$\begin{array}{rlr} 119025 = & a^2 + 2ab + b^2 + 2(a+b)c + c^2 & \\ 90000 = & a^2 & \\ \hline 29025 = & 2ab + b^2 + 2(a+b)c + c^2; & 2ab < 29025 \\ 25600 = & 2ab + b^2 & b < 48\frac{225}{600}. \\ \hline 3425 = & \qquad 2(a+b)c + c^2; & 2(a+b)c < 3425 \\ 3425 = & \qquad 2(a+b)c + c^2 & c < 5\frac{25}{680}. \\ \hline \end{array}$$

Läßt man die überflüssigen Nullen und die Formeln fort und schreibt die Divisoren vor die Zahl, die man durch Subtraktion erhält, so bekommt man für das Ausziehen der Quadratwurzel folgendes Schema:

$\sqrt{11|90|25} = 345$
9
6) 29|0
25 6
68) 3 42|5
3 42 5

Beispiele: 1. $\sqrt{6|70|81} = 259.$
4
4) 27|0
22 5
50) 4 58|1
4 58 1

2. $\sqrt{5{,}9049} = 2{,}43.$
4
4) 19|0
17 6
48) 1 44|9
1 44 9

Berechnet man die Quadratwurzel im Beispiel 1. ebenso ausführlich wie die vorhergehende Quadratwurzel, so findet man

$$b < 27081 : 400 = 67\frac{281}{400}.$$

Hieraus findet man zunächst $b = 60$. Die weitere Rechnung zeigt, daß dieser Wert zu groß ist. Man muß daher, weil b am Ende eine Null besitzen muß, sofort $b = 50$ setzen.

§ 34. Dritte Erweiterung des Zahlengebietes. Die irrationalen Zahlen.

Es soll die Quadratwurzel aus der Zahl 7 ausgezogen werden. Man findet

$\sqrt{7} = 2{,}6457\ldots$
4
4) 30|0
27 6
52) 240|0
209 6
528) 3040|0
2642 5
5290) 39750|0
37034 9
52914) 2715 10|0

Bald erkennt man, daß die Quadratwurzelausziehung niemals ein Ende nehmen wird. Würde die Rechnung an einer Stelle ein Ende erreichen, so müßte der erhaltene Dezimalbruch mit sich selbst multipliziert die ganze Zahl 7 ergeben, und dies ist nicht möglich. Die Wurzel ist also ein unendlicher Dezimalbruch. Dieser Dezimalbruch kann auch nicht periodisch sein, d. h. es können sich auch nicht von irgendeiner Stelle an die Ziffern in bestimmter Folge wiederholen. Wäre dies nämlich der Fall, so könnte der unendliche Dezimalbruch durch einen gewöhnlichen Bruch dargestellt werden (vgl. § 18), und dann müßte dieser Bruch, in das Quadrat erhoben, die ganze Zahl 7 ergeben. Wir haben es also in unserem Falle mit einem unendlichen, nicht periodischen Dezimalbruche zu tun, der sich durch keinen gewöhnlichen Bruch darstellen läßt, also mit einer ganz neuen Zahlenart. Diese neuen Zahlen, auf welche man immer kommt, wenn man die Wurzel aus einer Zahl auszuziehen hat, die keine Potenz ist, deren Exponent ein Vielfaches des Wurzelexponenten ist, nennt man irrationale Zahlen, z. B. $\sqrt[3]{17}$, $\sqrt{11}$.

Eine irrationale Zahl ist also ein unendlicher, nicht periodischer Dezimalbruch. Sie läßt sich daher niemals genau, wohl aber mit jeder gewünschten Genauigkeit angeben.

Die ganzen Zahlen und die Brüche nennt man, im Gegensatz zu den irrationalen Zahlen, rationale Zahlen.

Bemerkung. Nimmt man für $\sqrt{7}$ den Wert bis zur ersten Dezimalstelle, setzt also $\sqrt{7} = 2{,}6$, und erhebt dann 2,6 in das Quadrat, so findet man 6,76. Benutzt man zwei Dezimalstellen, setzt also $\sqrt{7} = 2{,}64$, so findet man durch Quadrieren dieser Zahl 6,9696. Hat man $\sqrt{7} = 2{,}645$ genommen, so erhält man durch Quadrieren 6,996025. Bricht man also das Ausziehen der Quadratwurzel an einer bestimmten Stelle ab, so gibt die dann für $\sqrt{7}$ erhaltene Zahl zwar den genauen Wert der Wurzel nicht an, nähert sich aber diesem Werte mit um so größerer Genauigkeit, je mehr Dezimalstellen man berechnet hat. Man nennt daher jede in dieser Weise für die Wurzel gefundene Zahl einen Näherungswert der Wurzel.

§ 35. Die Radizierung einer Potenz. Potenzen mit gebrochenen Exponenten.

1. Mit Benutzung der Brüche ist es möglich, jede Zahl in ein Produkt zu verwandeln, dessen einen Faktor man beliebig wählen kann. So ist $a = \frac{a}{b} \cdot b$. Hierdurch findet man den

Lehrsatz über die Radizierung einer Potenz. Statt eine Potenz zu radizieren, darf man ihren Exponenten durch den Wurzelexponenten dividieren.

Behauptung: $\sqrt[n]{a^p} = a^{\frac{p}{n}}$.

Beweis: Es ist $\sqrt[n]{a^p} = \sqrt[n]{a^{\frac{p}{n}\cdot n}} = \sqrt[n]{\left(a^{\frac{p}{n}}\right)^n}$ (§ 29, III) $= a^{\frac{p}{n}}$ (§ 32, Lehrs. II).

Die Anwendung dieses Lehrsatzes führt nur in den Fällen, wo p durch n ohne Rest teilbar ist, auf eine Größe, die nach den bisherigen Feststellungen brauchbar ist.

$$\sqrt[5]{a^{35}} = a^7; \qquad \sqrt[6]{a^{18}} = a^3.$$

Geht die Division nicht auf, so kommt man auf eine Potenz, deren Exponent ein Bruch ist, eine Bruchpotenz, mit der man nach der Erklärung der Potenz keinen Sinn verbinden kann. Man hat aber, um dem obigen Satz über die Radizierung einer Potenz ausnahmslose Gültigkeit zu verschaffen, die **Bruchpotenz** beibehalten und versteht darunter nur eine andere Schreibweise für die Wurzel.

Mit einem Bruch potenzieren heißt also die Grundzahl mit dem Zähler potenzieren und die erhaltene Potenz mit dem Nenner radizieren.

$$a^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{a^2}, \; a^{\frac{5}{6}} = \sqrt[6]{a^5}.$$

Mit den Bruchpotenzen kann man nach den Regeln rechnen, die für die einfachen Potenzen gelten. Den Nachweis dafür, daß dies gestattet ist, kann man führen, indem man die Potenzen durch die Wurzeln ersetzt.

2. Aus der Gleichwertigkeit einer Wurzel und einer Bruchpotenz folgt der für die Wurzelrechnung wichtige

Lehrsatz. Der Wert einer Wurzel ändert sich nicht, wenn man den Exponenten der Wurzel und den Exponenten des Radikandus mit derselben Zahl multipliziert oder durch dieselbe Zahl dividiert.

Behauptung: $\sqrt[n]{a^p} = \sqrt[nq]{a^{pq}}$.

Beweis: $\sqrt[n]{a^p} = a^{\frac{p}{n}} = a^{\frac{pq}{nq}}$ (§ 18 Lehrs. 1) $= \sqrt[nq]{a^{pq}}$.

Beispiele: 1. $\sqrt[4]{a^3} = \sqrt[8]{a^6} = \sqrt[16]{a^{12}} = \dots$ 3. $\sqrt{5} = \sqrt[4]{5^2} = \sqrt[4]{25}$.

2. $\sqrt[21]{a^{18}} = \sqrt[7]{a^6}$. 4. $\sqrt[6]{8} = \sqrt[6]{2^3} = \sqrt{2}$.

§ 36. Das Radizieren von Produkten und Quotienten.

Für die Radizierung einer Summe oder einer Differenz gibt es keine einfachen Sätze, wie es auch über die Potenzierung dieser Größen keine gab (§ 30, III).

I. Lehrsatz über die Radizierung eines Produktes. Statt ein Produkt zu radizieren, darf man die Faktoren einzeln radizieren und die erhaltenen Wurzeln miteinander multiplizieren.

Behauptung: $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$.

Beweis: Setzt man $\sqrt[n]{a} = \alpha$ und $\sqrt[n]{b} = \beta$, dann ist $a = \alpha^n$ und $b = \beta^n$. Aus diesen beiden Gleichungen folgt durch Multiplikation nach § 3 V c die Gleichung $ab = \alpha^n \cdot \beta^n$ und nach § 30, I $ab = (\alpha \cdot \beta)^n$. Hierfür kann man aber schreiben

$$\sqrt[n]{ab} = \alpha \cdot \beta.$$

Setzt man für α und β ihre Werte ein, so folgt die Behauptung.

Anwendungen dieses Satzes:

1. Steht unter einer Wurzel ein Produkt von Potenzen, deren Exponenten gleich dem Wurzelexponenten oder ganze Vielfache desselben sind, so kann man die Wurzel ziehen, ohne das Produkt zu bilden.

$$\sqrt{25 \cdot 36} = 5 \cdot 6 = 30. \qquad \sqrt[3]{8 \cdot 125} = 2 \cdot 5 = 10.$$

2. Steht unter der Wurzel eine Zahl, die sich so in Faktoren zerlegen läßt, daß der eine Faktor eine Potenz ist, deren Exponent gleich dem Wurzelexponenten oder einem ganzen Vielfachen desselben ist, so kann man die Wurzel in ein Produkt verwandeln, dessen einer Faktor rational ist.

$$\sqrt{50} = \sqrt{25 \cdot 2} = \sqrt{25} \cdot \sqrt{2} = 5\sqrt{2}$$
$$\sqrt[3]{81} = \sqrt[3]{27 \cdot 3} = \sqrt[3]{27} \cdot \sqrt[3]{3} = 3\sqrt[3]{3}.$$

2. Steht unter der Wurzel eine Potenz, deren Exponent größer ist als der Wurzelexponent, so kann man stets einen Faktor vor die Wurzel setzen. $\sqrt[5]{a^7} = \sqrt[5]{a^{5+2}} = \sqrt[5]{a^5 \cdot a^2} = a\sqrt[5]{a^2}$

$$\sqrt[7]{a^{33}} = \sqrt[7]{a^{28} \cdot a^5} = a^4\sqrt[7]{a^5}; \qquad \sqrt[6]{a^{10}b^{15}} = ab^2\sqrt[6]{a^4b^3}.$$

II. Lehrsatz über die Radizierung eines Bruches. Statt einen Bruch zu radizieren, darf man Zähler und Nenner einzeln radizieren und die erhaltenen Wurzeln durcheinander dividieren.

Behauptung: $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$.

Beweis: Setzt man $\sqrt[n]{a} = \alpha$ und $\sqrt[n]{b} = \beta$, dann ist $a = \alpha^n$ und $b = \beta^n$. Aus diesen beiden Gleichungen folgt durch Division nach § 3, V d die Gleichung $\frac{a}{b} = \frac{\alpha^n}{\beta^n}$ und nach § 30, II $\frac{a}{b} = \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^n$. Hierfür kann man aber schreiben $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\alpha}{\beta}$. Setzt man nun für α und β ihre Werte ein, so folgt die Behauptung.

Anwendungen dieses Satzes:

1. Einfachste Radizierung eines Bruches.

$$\sqrt{\frac{25}{49}} = \frac{5}{7}; \quad \sqrt[3]{\frac{27}{8}} = \frac{3}{2} = 1,5.$$

2. Steht unter dem Wurzelzeichen ein Bruch, so kann man stets die Wurzel so umformen, daß der Bruch unter dem Wurzelzeichen verschwindet, indem man den Radikandus so erweitert, daß sich die Wurzel aus dem Nenner ziehen läßt.

$$\sqrt{\frac{7}{5}} = \sqrt{\frac{35}{25}} = \frac{1}{5}\sqrt{35}; \quad \sqrt{\frac{3}{8}} = \sqrt{\frac{6}{16}} = \frac{1}{4}\sqrt{6}.$$

$$\sqrt[5]{\frac{a^3}{b^2}} = \sqrt[5]{\frac{a^3 b^3}{b^5}} = \frac{1}{b}\sqrt[5]{a^3 b^3}.$$

Bemerkung: Die Beispiele dieses Paragraphen machen es verständlich, daß man auch einen Faktor, der vor einer Wurzel steht, als Faktor unter die Wurzel setzen kann. Man hat dann nur den Exponenten des Faktors vorher mit dem Wurzelexponenten zu multiplizieren.

$$a^3 \sqrt[5]{a^2} = \sqrt[5]{a^{17}}; \quad a\sqrt[3]{a} = \sqrt[3]{a^4}; \quad 2\sqrt[3]{5} = \sqrt[3]{2^3 \cdot 5} = \sqrt[3]{40}.$$

$$\frac{a^2}{b^3}\sqrt[4]{\frac{b^3}{a^3}} = \sqrt[4]{\frac{a^8 b^3}{b^{12} a^3}} = \sqrt[4]{\frac{a^5}{b^9}}.$$

$$\frac{1}{3}\sqrt{2} = \sqrt{\frac{2}{9}}; \quad \frac{1}{3}\sqrt{3} = \sqrt{\frac{1}{3}}.$$

§ 37. Die Addition und Subtraktion von Wurzeln.

Wurzeln können nur dann durch Addition oder Subtraktion zu einer Wurzel zusammengefaßt werden, wenn sie im Radikandus und im Wurzelexponenten übereinstimmen. So ist $\sqrt{a} + \sqrt[3]{a^2}$ nicht weiter zu vereinfachen, aber es ist $\sqrt[3]{a^2} + \sqrt[3]{a^2} = 2\sqrt[3]{a^2}$.

Zuweilen lassen sich Wurzeln, deren Radikanden verschieden sind, nach Umformungen, wie sie im vorigen Paragraphen angegeben sind, noch addieren. So ist

$$\sqrt{50} + \sqrt{98} + 4\sqrt{18} = 5\sqrt{2} + 7\sqrt{2} + 12\sqrt{2} = 24\sqrt{2}.$$

$$\sqrt[3]{a^4b^2} + \sqrt[3]{a^7b^5} = a\sqrt[3]{ab^2} + a^2b\sqrt[3]{ab^2} = (a + a^2b)\sqrt[3]{ab^2}.$$

Weitere Beispiele:

1. $2\sqrt{\frac{2}{3}} + 3\sqrt{8\frac{1}{6}} + \frac{1}{3}\sqrt{6} + \sqrt{1{,}5} = 5\sqrt{6}.$

2. $3\sqrt[5]{a^6b^7} + \frac{5a}{b}\sqrt[5]{ab^{12}} - \frac{b}{a}\sqrt[5]{a^{11}b^2} = 7ab\sqrt[5]{ab^2}.$

3. $\frac{a^2}{b}\sqrt[4]{\frac{b^5}{a^3}} + \frac{b}{a}\sqrt[4]{\frac{a^9}{b^3}} + b^2\sqrt[4]{\frac{a^5}{b^7}} = 3a\sqrt[4]{ab}.$

4. $\frac{a^3}{b^2}\sqrt[3]{\frac{b^8}{a^7}} + b^2\sqrt[3]{\frac{a^2}{b^4}} - \frac{b}{a}\sqrt[3]{\frac{a^5}{b}} = \sqrt[3]{a^2b^2}.$

§ 38. Die Multiplikation, Division und Potenzierung von Wurzeln.

1. Die Umkehrungen der beiden in § 36 besprochenen Lehrsätze lauten

$$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab} \text{ und } \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}.$$

Diese beiden Umkehrungen lehren, daß man Wurzeln nur dann multiplizieren oder dividieren kann, wenn sie im Exponenten übereinstimmen.

Lehrsatz über die Multiplikation und Division der Wurzeln. Statt Wurzeln mit demselben Exponenten zu multiplizieren (dividieren), kann man die Wurzel aus dem Produkt (Quotienten) der Radikanden ziehen.

Beispiele: $\sqrt[3]{a^2b} \cdot \sqrt[3]{a^5b^5} = \sqrt[3]{a^7b^6} = a^2b^2\sqrt[3]{a}$

$$\frac{\sqrt[5]{a^4b^7}}{\sqrt[5]{a^6b^4}} = \sqrt[5]{\frac{b^3}{a^2}} = \frac{1}{a}\sqrt[5]{a^3b^3}.$$

Auch die Multiplikation und Division zweier beliebigen Wurzeln ist möglich, nicht nur zweier Wurzeln mit demselben Exponenten, denn man kann nach § 35,2 stets zwei Wurzeln auf denselben Exponenten bringen. Man wählt zu diesem Exponenten das kleinste gemeinschaftliche Vielfache der gegebenen Wurzelexponenten.

Beispiele.

1. $\sqrt[3]{a^2} \cdot \sqrt[4]{a^3} = \sqrt[12]{a^8} \cdot \sqrt[12]{a^9} = \sqrt[12]{a^{17}} = a\sqrt[12]{a^5}.$

2. $\sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[5]{a^7} \cdot \sqrt[6]{a^5} = \sqrt[30]{a^{10}} \cdot \sqrt[30]{a^{42}} \cdot \sqrt[30]{a^{25}} = \sqrt[30]{a^{77}} = a^2\sqrt[30]{a^{17}}.$

3. $\dfrac{\sqrt[3]{a^2}}{\sqrt[5]{a^3}} = \dfrac{\sqrt[15]{a^{10}}}{\sqrt[15]{a^9}} = \sqrt[15]{a}.$

4. $\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt{3} = \sqrt[6]{4} \cdot \sqrt[6]{27} = \sqrt[6]{108}.$

2. Aus dem soeben besprochenen Lehrsatze folgt

$$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{a} \ldots \text{ (} p \text{ Faktoren)} = \sqrt[n]{a \cdot a \cdot a \ldots \text{ (} p \text{ Faktoren)}},$$

oder

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^p = \sqrt[n]{a^p}.$$

In dieser Formel ist enthalten der

Lehrsatz über die Potenzierung einer Wurzel. Statt eine Wurzel zu potenzieren, darf man den Radikandus potenzieren.

Beispiele: $\left(\sqrt[8]{a^5}\right)^3 = \sqrt[8]{a^{15}} = a\sqrt[8]{a^7}.$

$\left(\sqrt[3]{5}\right)^2 = \sqrt[3]{25}.$

Auf der linken Seite der Behauptung unseres Lehrsatzes ist die Zahl a zuerst mit n radiziert und das Ergebnis dann mit p potenziert, auf der rechten Seite ist aber zuerst a mit p potenziert und dann aus dem Ergebnis die n^{te} Wurzel gezogen. Man erkennt hieraus, daß, falls die Aufgabe gestellt ist, eine Zahl mit einer zweiten zu potenzieren und mit einer dritten zu radizieren, es gleichgültig ist, in welcher Folge man dies tut.

$$\sqrt[3]{125^2} = 5^2 = 25; \quad \sqrt[5]{32^4} = 2^4 = 16.$$

§ 39. Die Radizierung einer Wurzel.

Lehrsatz über die Radizierung einer Wurzel. Statt eine Wurzel zu radizieren, darf man ihren Exponenten mit dem anderen Exponenten multiplizieren.

Behauptung: $\sqrt[n]{\sqrt[p]{a}} = \sqrt[np]{a}.$

Beweis: Beide Seiten der Behauptung ergeben mit n potenziert $\sqrt[p]{a}.$

Beispiele: 1. $\sqrt[3]{\sqrt[4]{a^5}} = \sqrt[12]{a^5}$.

2. $\sqrt[3]{\sqrt{\sqrt[5]{a^{12}}}} = \sqrt[30]{a^{12}} = \sqrt[5]{a^2}$.

3. $\sqrt[3]{a^2\sqrt[4]{a^3}} = \sqrt[3]{\sqrt[4]{a^{11}}} = \sqrt[12]{a^{11}}$.

Die **Umkehrung dieses Lehrsatzes** lautet: **Statt mit einem Produkt zu radizieren, darf man mit den einzelnen Faktoren nacheinander in beliebiger Folge radizieren.**

Behauptung: $\sqrt[np]{a} = \sqrt[n]{\sqrt[p]{a}} = \sqrt[p]{\sqrt[n]{a}}$.

Auf Grund dieser Umkehrung kann man aus einer Zahl die vierte, achte usw. Wurzel ziehen, wenn man die Quadratwurzel ziehen kann. Soll man nämlich aus einer Zahl die vierte Wurzel ziehen, so zieht man zunächst die Quadratwurzel aus derselben und dann aus dem gefundenen Resultat noch einmal die Quadratwurzel.

Beispiel: $\sqrt[4]{3\,41|88|01} = \sqrt{18|49} = 43$.

```
         1                    16
       ------               ------
2)     24|1           8)     24|9
       22 4                  24 9
      ---------             ------
36)     1 78|8
        1 45|6
      ----------
368)     33 20|1
         33 20 1
      ----------
```

§ 40. Das Rationalmachen des Nenners.

Da es beim Rechnen Schwierigkeiten bereitet, wenn ein Divisor eine irrationale Zahl ist, so ist es von Wichtigkeit, daß man irrationale Zahlen, die im Nenner von Brüchen auftreten, aus diesen Nennern fortschafft. Es ist dies stets möglich durch passendes Erweitern des Bruches.

Ist der Nenner eine einfache Irrationszahl, also eine Zahl von der Form $\sqrt[n]{a^p}$, so erweitert man den Bruch mit $\sqrt[n]{a^q}$; wobei q so zu wählen ist, daß $p + q$ durch n ohne Rest teilbar ist.

$$\frac{5}{\sqrt{7}} = \frac{5\sqrt{7}}{7}; \quad \frac{12}{\sqrt{18}} = \frac{12\sqrt{2}}{6} = 2\sqrt{2}.$$

$$\frac{a^3}{\sqrt[5]{a^{13}}} = \frac{a^3\sqrt[5]{a^2}}{a^3} = \sqrt[5]{a^2}.$$

Steht in dem Nenner eine zweigliedrige Summe, in der ein Summand oder beide irrationale Quadratwurzeln sind, so erweitert man den Bruch mit der mit denselben absoluten Zahlen geschriebenen Differenz; steht eine Differenz im Nenner, so erweitert man mit der entsprechenden Summe. Die Anwendung der Formel $(a+b)\cdot(a-b) = a^2 - b^2$ macht dann stets den Nenner rational.

Beispiele:

1. $\frac{16}{\sqrt{17}+3} = \frac{16\,(\sqrt{17}-3)}{(\sqrt{17}+3)\,(\sqrt{17}-3)} = \frac{16\,(\sqrt{17}-3)}{17-9} = 2\,(\sqrt{17}-3),$

2. $\frac{5}{\sqrt{22}-\sqrt{17}} = \frac{5\,(\sqrt{22}+\sqrt{17})}{22-17} = \sqrt{22}+\sqrt{17}.$

3. $\frac{x}{\sqrt{1+x^2}-x} = \frac{x\,(\sqrt{1+x^2}+x)}{1+x^2-x^2} = x\,(\sqrt{1+x^2}+x).$

4. $\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}} = \frac{(\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x})^2}{1+x-1+x} = \frac{2-2\sqrt{1-x^2}}{2x}$
$= \frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x}.$

§ 41. Wurzelrechnung mit algebraischen Zahlen. Vierte Erweiterung des Zahlengebietes. Die imaginären Zahlen.

Rechnet man mit algebraischen Zahlen, so ist $\sqrt{49}$ nicht nur gleich 7, sondern sie kann $+7$ oder -7 sein, denn sowohl $+7$ wie -7 geben in das Quadrat erhoben 49 als ausgerechnete Potenz.

Eine Quadratwurzel ist also doppeldeutig, ihr Wert kann sowohl positiv wie negativ sein.

Ist der Radikandus einer Quadratwurzel eine algebraische Zahl, so ist für den Fall eines positiven Radikandus der Wert derselbe wie für den entsprechenden absoluten Radikandus. Es ist $\sqrt{+121} = \sqrt{121} = \pm 11$.

Wenn aber der Radikandus der Quadratwurzel eine negative Zahl ist, so ist die Wurzelaufgabe unlösbar, d. h. es gibt unter allen bisher eingeführten Zahlen keine, welche die Forderung der Aufgabe erfüllt, keine, deren Quadrat eine negative Zahl ist. Wollte man auch diese Aufgaben als lösbar behandeln, so war man also wieder zur Einführung einer neuen Einheit und somit neuer Zahlen gezwungen. Diese Einheit setzte man durch folgende Überlegung fest.

Es ist $\sqrt{-49} = \sqrt{49 \cdot (-1)} = \sqrt{49} \cdot \sqrt{-1} = \pm 7 \cdot \sqrt{-1}$

$$\sqrt{-64} = \sqrt{64 \cdot (-1)} = \pm 8 \sqrt{-1}$$

$$\sqrt{-81} = \pm 9 \sqrt{-1}.$$

Führt man nun als neue Einheit $\sqrt{-1}$ ein und demnach neue Zahlen, die nach dieser Einheit fortschreiten, so kann man mit Hilfe dieser Zahlen auch die Quadratwurzeln aus negativen Zahlen ziehen.

Diese neuen Zahlen, denen man lange Zeit nicht dieselbe Berechtigung zuerkannte wie den negativen Zahlen, weil man sich nicht von ihnen, wie z. B. bei den positiven und negativen durch Vermögen und Schulden, Vorwärts- und Rückwärtszählen, eine Vorstellung verschaffen konnte, nennt man imaginäre Zahlen und die Einheit $\sqrt{-1}$, nach der sie sich aufbauen, die imaginäre Einheit. Diese imaginäre Einheit wird gewöhnlich durch i bezeichnet, so daß die Reihe der imaginären Zahlen

$$1i, 2i, 3i, 4i, 5i, \ldots$$

geschrieben wird. Die übrigen Zahlen, die nicht imaginären, nennt man im Gegensatz zu den imaginären Zahlen reelle Zahlen.

Die imaginäre Einheit i ist also eine Zahl, welche mit den reellen Zahlen durch die Gleichung

$$i^2 = -1$$

verknüpft ist.

Die aufeinanderfolgenden Potenzen von i sind $i^0 = 1$, $i^1 = i$, $i^2 = -1$, $i^3 = -i$ (die man findet, wenn man die Gleichung $i^2 = -1$ mit der Gleichung $i^1 = i$ multipliziert), $i^4 = -i^2 = +1$. Da nun i^4 denselben Wert hat wie i^0, so folgt, daß i^5 denselben Wert haben muß wie i^1 usw. Sämtliche Potenzen von i lassen sich also auf die vier Grundformen

$$+1, \quad +i, \quad -1, \quad -i$$

zurückführen.

Die Zurückführung geschieht folgendermaßen. Man dividiert den Exponenten der gegebenen Potenz durch 4 und ermittelt den Rest. Potenziert man nun i mit dem erhaltenen Rest, so ist der Wert dieser Potenz von i gleich dem der gegebenen Potenz.

$$i^{38} = i^2 = -1;\ i^{144} = i^0 = +1;\ i^{99} = i^3 = -i.$$

Bezeichnet man die reelle Zahl allgemein durch a und die imaginäre Zahl durch bi, wobei b den reellen Bestandteil der imaginären Zahl bi bedeutet, so umfaßt die Summe

$$a + bi$$

das gesamte Zahlengebiet. Man nennt daher diese Summe eine **komplexe Zahl** (complecti = zusammenfassen).

Zwei komplexe Zahlen, die sich nur durch das Vorzeichen vor dem imaginären Teil unterscheiden, also zwei Zahlen wie

$$a + bi \text{ und } a - bi,$$

heißen **konjugiert komplexe Zahlen** (conjugare = zusammenkoppeln).

Mit diesen komplexen Zahlen rechnet man wie mit gewöhnlichen Zahlen.

I. **Addition und Subtraktion:** $(3 + 4i) + (7 + 5i) = 10 + 9i$

$$8 + 3i - (5 - 2i) = 3 + 5i$$
$$(5 + 6i) + (5 - 6i) = 10$$
$$(7 + 8i) - (7 - 8i) = 16i.$$

Zu bemerken ist hierbei, daß die Addition konjugiert komplexer Zahlen auf eine rein reelle Zahl führt und ihre Subtraktion auf eine rein imaginäre Zahl.

II. **Multiplikation:**

$$\begin{aligned}(5 + 7i) \cdot (3 + 2i) &= 15 + 21i + 10i + 14i^2 \\ &= 15 + 31i - 14 \text{ (da } i^2 = -1) \\ &= 1 + 31i. \\ (3 + 4i) \cdot (3 - 4i) &= 9 - 16i^2 \\ &= 9 + 16 = 25.\end{aligned}$$

Zu bemerken ist hier, daß die Multiplikation zweier konjugiert komplexen Zahlen $(a + bi)(a - bi)$ auf eine reelle Zahl $a^2 + b^2$ führt, die gleich der Summe der Quadrate der reellen Bestandteile derselben ist. Man nennt $a^2 + b^2$ die **Norm der komplexen Zahl.**

III. **Division:** Die Division zweier komplexen Zahlen führt man in der Weise aus, daß man sich die Divisionsaufgabe in Bruchform geschrieben denkt und dann den Bruch mit derjenigen Zahl erweitert, welche der im Nenner stehenden konjugiert ist.

Hierdurch wird der Divisor stets zu einer reellen Zahl.

$$\begin{aligned}\frac{5 + 4i}{2 + 3i} &= \frac{(5 + 4i)(2 - 3i)}{4 + 9} = \frac{10 + 8i - 15i - 12i^2}{13} \\ &= \frac{22 - 7i}{13} = \frac{22}{13} - \frac{7}{13}i.\end{aligned}$$

§ 42. Anhang zur Wurzellehre.

I. Die Radizierung macht es möglich, jede Zahl als eine Potenz mit beliebigem Exponenten darzustellen. So ist

$$a = (\sqrt{a})^2 = (\sqrt[3]{a})^3 = \ldots$$
$$a^3 = (\sqrt[5]{a^3})^5$$
$$\sqrt[3]{a^2} = \left(\sqrt[5]{\sqrt[3]{a^2}}\right)^5 = \left(\sqrt[15]{a^2}\right)^5.$$

Da man demnach jede Zahl als ein Quadrat darstellen kann, so kann man auch jede Differenz als eine Differenz von Quadraten darstellen und demnach nach der Formel $a^2 - b^2 = (a + b)\ (a - b)$ in ein Produkt verwandeln.

Beispiele:

1. $$a - b = (\sqrt{a})^2 - (\sqrt{b})^2$$
$$= (\sqrt{a} + \sqrt{b})\ (\sqrt{a} - \sqrt{b}).$$

2. $$\sqrt[3]{a} - \sqrt[4]{b} = (\sqrt[6]{a})^2 - (\sqrt[8]{b})^2$$
$$= (\sqrt[6]{a} + \sqrt[8]{b}) \cdot (\sqrt[6]{a} - \sqrt[8]{b}).$$

II. Die Einführung der imaginären Zahlen macht es möglich, jede Summe in eine Differenz zu verwandeln, da $+ 1 = - i^2$ ist. Man kann daher auch Summen in Faktoren zerlegen.

$$a^2 + b^2 = a^2 - i^2 b^2 = (a + ib) \cdot (a - ib)$$
$$a + b = a - i^2 b = (\sqrt{a} + i\sqrt{b}) \cdot (\sqrt{a} - i\sqrt{b}).$$

§ 43. Gleichungen, in denen Wurzeln vorkommen.

Der Weg zur Lösung einer Gleichung ist nach den Auseinandersetzungen im ersten Abschnitt kurz folgender. Nenner, die in der Gleichung vorkommen, werden durch Multiplikation der Gleichung mit dem kleinsten gemeinschaftlichen Vielfachen dieser Nenner fortgeschafft (§ 22). Etwa vorhandene Klammern werden aufgelöst (§ 10, § 12, § 15). Hierauf werden die Glieder, welche die Unbekannte enthalten, auf die eine Seite, die übrigen Glieder auf die andere Seite geschafft.

Enthält eine Gleichung Wurzeln, so müssen auch diese beseitigt werden. In welcher Weise dies geschieht, wird am besten an den folgenden Beispielen klar werden.

Beispiel 1. $\sqrt{(x - 7)\ (x + 2)} + 4 = x.$

Man isoliert zunächst die Wurzel, indem man 4 auf die rechte Seite schafft.

$$\sqrt{(x - 7)\ (x + 2)} = x - 4.$$

Nun erhebt man die Gleichung in das Quadrat, d. h. man potenziert beide Seiten mit 2. Daß man hierdurch wieder eine richtige Gleichung erhält, folgt aus § 3 Vc, denn man kann das Potenzieren dadurch ersetzt denken, daß man die vorliegende Gleichung mit derselben Gleichung $\sqrt{(x-7)(x+2)} = x - 4$ multipliziert. Man erhält

$$(x-7)(x+2) = x^2 - 8x + 16$$
$$x = 10.$$

Beispiel 2. $\sqrt{3x+4} + \sqrt{3x-5} = 9.$

Die eine der beiden Wurzeln wird auf die rechte Seite geschafft, um die andere zu isolieren.

$$\sqrt{3x+4} = 9 - \sqrt{3x-5}.$$

Darauf wird die Gleichung in das Quadrat erhoben

$$3x + 4 = 81 - 18\sqrt{3x-5} + 3x - 5.$$

Nun verfährt man wie beim Beispiel 1 und findet

$$18\sqrt{3x-5} = 72; \sqrt{3x-5} = 4$$
$$3x - 5 = 16; x = 7.$$

(Man achte darauf, vor dem Quadrieren gemeinsame Faktoren beider Seiten der Gleichung durch Division fortzuschaffen.)

Beispiel 3.

$$\sqrt{8x+9} + \sqrt{2x-1} - \sqrt{18x+10} = 0.$$

Man schafft die eine der Wurzeln auf die rechte Seite und erhebt dann die Gleichung in das Quadrat.

$$\sqrt{8x+9} + \sqrt{2x-1} = \sqrt{18x+10},$$
$$8x + 9 + 2\sqrt{8x+9}\sqrt{2x-1} + 2x - 1 = 18x + 10,$$
$$2\sqrt{16x^2 + 10x - 9} = 8x + 2,$$
$$\sqrt{16x^2 + 10x - 9} = 4x + 1,$$
$$16x^2 + 10x - 9 = 16x^2 + 8x + 1; x = 5.$$

Die quadratischen Gleichungen.

§ 44. Erklärung der quadratischen Gleichung. Lösung einfacher Aufgaben.

Wenn in einer Gleichung mit der Unbekannten x nach Fortschaffung der Nenner und Wurzeln und nach Auflösung der Klammern außer der ersten Potenz der Unbekannten auch noch die zweite Potenz der Unbekannten vorkommt, so nennt man die Gleichung eine Gleichung zweiten Grades oder eine quadratische Gleichung. So sind

$$(x+4)(x+2) = 10x + 5,$$

$$x + \frac{8}{x} = 6,$$

$$x - \sqrt{x+3} = 3$$

quadratische Gleichungen, denn nach den oben angedeuteten Umformungen erhält man aus ihnen die Gleichungen:

$$x^2 - 4x + 3 = 0$$

$$x^2 - 6x + 8 = 0$$

$$x^2 - 7x + 6 = 0.$$

Jede quadratische Gleichung kann also auf eine Gleichung von der Form $nx^2 + mx + p = 0$ gebracht werden, in der n, m und p bekannte Größen bedeuten. Dividiert man diese Gleichung durch den Koeffizienten von x^2, so erhält man

$$x^2 + \frac{m}{n}x + \frac{p}{n} = 0.$$

Ersetzt man hier $\frac{m}{n}$ durch a und $\frac{p}{n}$ durch b, so erhält man als allgemeine Form der Gleichung zweiten Grades oder als **Normalform der Gleichung zweiten Grades**

$$x^2 + ax + b = 0.$$

Jede quadratische Gleichung muß zu ihrer Lösung zunächst auf diese Normalform gebracht werden, in welcher das Glied, welches die zweite Potenz der Unbekannten enthält, stets den Koeffizienten Eins besitzen muß. Eine auf die Normalform gebrachte quadratische Gleichung nennt man auch „geordnet". Es kommt nun darauf an, zu erklären, in welcher Weise die Lösung der auf die Normalform gebrachten Gleichung erfolgt. Nach § 20 II kann man setzen:

$$x^2 - 6x + 9 = (x-3)^2$$

$$x^2 + 10x + 25 = (x+5)^2.$$

Man kann auch, wenn von den drei Summanden der linken Seite nur die beiden ersten gegeben sind, stets den dritten bestimmen. Er ist das Quadrat des halben Koeffizienten von x. So ist für $x^2 + 8x$ das diese Summe zu einem vollständigen Quadrat ergänzende dritte Glied, oder, wie man auch sagt: die **quadratische Ergänzung** zu $x^2 + 8x$, die Zahl $\left(\frac{8}{2}\right)^2 = 4^2 = 16$. Für $x^2 + 14x$ ist die quadratische Ergänzung $\left(\frac{14}{2}\right)^2 = 7^2 = 49$. Für $x^2 + 5x$ ist die quadratische Ergänzung $\left(\frac{5}{2}\right)^2 = \frac{25}{4}$.

Nach diesen Auseinandersetzungen bietet die Lösung der quadratischen Gleichung in der Normalform keine Schwierigkeiten mehr.

Erstes Beispiel:

Ist $x^2 - 12x + 11 = 0$ gegeben, so fügt man nach dem zweiten Gliede die quadratische Ergänzung $+ 36$ ein und macht den entstandenen Fehler sofort dadurch wieder gut, daß man hinterher auch noch $- 36$ einschaltet. Man erhält auf diese Weise

$$x^2 - 12x + 36 - 36 + 11 = 0,$$
$$x^2 - 12x + 36 - 25 = 0,$$
$$(x - 6)^2 - 5^2 = 0. \quad (\S\ 20\ \text{II.})$$

Daraus folgt nach § 20 I:

$$(x - 6 - 5) \cdot (x - 6 + 5) = 0,$$
$$(x - 11) \cdot (x - 1) = 0.$$

Beachtet man nun, daß, wenn ein Produkt gleich Null ist, jeder Faktor gleich Null sein darf, so findet man entweder

$$x - 11 = 0, \text{ also } x = 11,$$

oder

$$x - 1 = 0, \text{ also } x = 1.$$

Wie man sich leicht durch Probieren überzeugen kann, sind beide Werte brauchbar. Die quadratische Gleichung liefert stets zwei Werte für die Unbekannte, die man durch x_1 (x eins) und x_2 (x zwei) zu bezeichnen pflegt. In unserem Falle ist also $x_1 = 11$ und $x_2 = 1$.

Zweites Beispiel: $x^2 - 10x + 21 = 0,$

$$x^2 - 10x + 25 - 25 + 21 = 0,$$
$$x^2 - 10x + 25 - 4 = 0,$$
$$(x - 5)^2 - 2^2 = 0,$$
$$(x - 5 - 2)(x - 5 + 2) = 0,$$
$$(x - 7)(x - 3) = 0. \quad x_1 = 7;\ x_2 = 3.$$

Drittes Beispiel: $x^2 + 7x + 10 = 0$,

$$x^2 + 7x + \frac{49}{4} - \frac{49}{4} + 10 = 0,$$

$$\left(x + \frac{7}{2}\right)^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^2 = 0,$$

$$\left(x + \frac{7}{2} - \frac{3}{2}\right)\left(x + \frac{7}{2} + \frac{3}{2}\right) = 0. \quad x_1 = -2;\ x_2 = -5.$$

Es kann nun leicht vorkommen, daß nach Einschaltung der quadratischen Ergänzung und Zusammenfassung der drei ersten Summanden zu einem Quadrat das übrig bleibende Glied kein vollständiges Quadrat ist. Ist z. B. die vorgelegte Gleichung

$$x^2 - 8x + 10 = 0,$$

so findet man

$$x^2 - 8x + 16 - 16 + 10 = 0,$$

$$(x - 4)^2 - 6 = 0.$$

Man hat daher keine Differenz zweier Quadrate, kann also die linke Seite zunächst nicht in ein Produkt verwandeln. Bedenkt man aber, daß $\left(\sqrt{a}\right)^2 = a$ ist (§ 42), so kann man auch statt 6 schreiben $\left(\sqrt{6}\right)^2$.

Man erhält dadurch statt der obigen Gleichung

$$(x - 4)^2 - \left(\sqrt{6}\right)^2 = 0,$$

$$\left(x - 4 - \sqrt{6}\right)\left(x - 4 + \sqrt{6}\right) = 0,$$

$$x_1 = 4 + \sqrt{6};\quad x_2 = 4 - \sqrt{6}.$$

Weiter pflegt man die Werte für die beiden Wurzeln der Gleichung nicht umzuformen. Man berechnet also nicht $\sqrt{6}$, solange es sich nur darum handelt, die Gleichung zu lösen. Nur mit den Werten für x_1 und x_2, wie sie oben stehen, kann man auch die Probe machen. Etwas anderes ist es, wenn es sich darum handelt, die Wurzelwerte praktisch zu verwerten. Man würde dann, wenn man z. B. die Werte von x bis auf vier Dezimalstellen bestimmen sollte, $\sqrt{6} = 2{,}4495$ setzen und dadurch erhalten

$$x_1 = 6{,}4495;\quad x_2 = 1{,}5505.$$

§ 45. Allgemeine Lösung der Normalform der quadratischen Gleichung.

Die Normalform der quadratischen Gleichung war

$$x^2 + ax + b = 0.$$

Die quadratische Ergänzung ist $\frac{a^2}{4}$. Wenn man diese in die linke Seite der Gleichung einfügt, so erhält man

$$x^2 + ax + \frac{a^2}{4} - \frac{a^2}{4} + b = 0,$$

$$\left(x + \frac{a}{2}\right)^2 - \left(\frac{a^2}{4} - b\right) = 0.$$

Hierfür kann man nach § 42, I schreiben

$$\left(x + \frac{a}{2}\right)^2 - \left(\sqrt{\frac{a^2}{4} - b}\right)^2 = 0.$$

Nun kann man die linke Seite in ein Produkt verwandeln und bekommt dadurch die Gleichung

$$\left(x + \frac{a}{2} - \sqrt{\frac{a^2}{4} - b}\right) \cdot \left(x + \frac{a}{2} + \sqrt{\frac{a^2}{4} - b}\right) = 0.$$

Diese Gleichung liefert, wenn man die Faktoren der linken Seite einzeln gleich Null setzt,

$$x_1 = -\frac{a}{2} + \sqrt{\frac{a^2}{4} - b}; \quad x_2 = -\frac{a}{2} - \sqrt{\frac{a^2}{4} - b}.$$

Beide Wurzeln kann man zusammenfassen durch die Gleichung

$$x = -\frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2}{4} - b}.$$

Es ist also die Wurzel einer geordneten quadratischen Gleichung gleich dem halben Koeffizienten von x mit entgegengesetztem Vorzeichen, vermehrt oder vermindert um die Quadratwurzel aus dem Quadrat dieses halben Koeffizienten und dem von x freien Gliede ebenfalls mit entgegengesetztem Vorzeichen.

Prägt man sich dieses ein, so kann man, sowie die quadratische Gleichung auf die Normalform gebracht ist, die Wurzeln ohne weiteres niederschreiben.

Aus der Gleichung $x^2 - 14x + 40 = 0$ folgt sofort $x = +7 \pm \sqrt{49 - 40}$. $x_1 = 10$ und $x_2 = 4$.

Beispiele:

1. $\frac{x+1}{x-1} + \frac{5x+2}{2x+2} = \frac{10x-5}{3x-3}$. $x_1 = 5$, $x_2 = 2$.

2. $\sqrt{2x+5} + \sqrt{x-6} = 3.$ $x_1 = 22,\ x_2 = 10.$

3. $\sqrt{2x+8} - \sqrt{x+5} = \sqrt{x-3}.$ $x_1 = 4,\ x_2 = -6.$

Macht man bei Gleichungen, welche Quadratwurzeln enthalten, die Probe, so muß man stets beachten, daß die Quadratwurzel aus einer Zahl sowohl positiv wie negativ sein kann (§ 41).

4. $\frac{x+2}{x+3} = x + 4.$ $x_1 = -3 + i,\ x_2 = -3 - i.$

5. $(2x+3)(x-2) - (x-5)^2 = 21;\ (x_1 = 4,\ x_2 = -13).$

6. $(x+3)^2 + (x+4)^2 = 5;\ (x_1 = -2,\ x_2 = -5).$

7. $\frac{3}{2}(x+7) - \frac{1}{4}(x^2-5) = x + 3;\ (x_1 = 7,\ x_2 = -5).$

8. $\frac{2x+3}{x-6} = \frac{x+9}{x-7};\ (x_1 = 11,\ x_2 = 3).$

9. $\frac{x+27}{2x+4} - \frac{x+22}{5x+10} = \frac{x+3}{3x-6};\ (x_1 = 202,\ x_2 = 3).$

10. $\frac{3x-2}{2x-6} - \frac{4x+47}{3x+9} - \frac{5x+8}{2x^2-18} = 0;\ (x_1 = 60,\ x_2 = 4).$

§ 46. Die Beziehungen zwischen der Normalform der quadratischen Gleichung und ihren Wurzeln.

Wenn man die beiden im vorigen Paragraphen ermittelten Wurzeln der geordneten quadratischen Gleichung addiert, so findet man

$$x_1 + x_2 = -a,$$

d. h. in jeder geordneten quadratischen Gleichung ist die Summe der Wurzeln gleich dem Koeffizienten von x mit entgegengesetztem Vorzeichen.

Multipliziert man die beiden Gleichungen für die Wurzeln nach § 15 Formel III, so erhält man

$$x_1 \cdot x_2 = b,$$

d. h. in jeder geordneten quadratischen Gleichung ist das Produkt der Wurzeln gleich dem dritten Gliede mit demselben Vorzeichen.

Diese beiden Sätze ermöglichen es, sofort die Gleichung aufzustellen, deren Wurzeln gegeben sind.

Soll man die Gleichung aufstellen, deren Wurzel $+5$ und $+7$ sind, so bildet man $x_1 + x_2 = +12$ und $x_1 x_2 = +35$. Daher lautet die Gleichung

$$x^2 - 12x + 35 = 0.$$

Die Gleichung, deren Wurzeln $+4$ und -10 sind, heißt

$$x^2 + 6x - 40 = 0.$$

§ 47. Die Funktion $y = x^2 + ax + b$ und ihre graphische Darstellung.

Setzt man die linke Seite einer auf die Normalform gebrachten quadratischen Gleichung gleich y, so erhält man die Gleichung

$$y = x^2 + ax + b.$$

Diese Gleichung stellt wieder eine Beziehung zwischen x und y dar. Betrachtet man x als die unabhängig Veränderliche und y als die abhängig Veränderliche oder die Funktion von x, so kann man in ähnlicher Weise, wie es im § 25 für die Gleichung von der Form $y = ax + b$ geschah, sich von der Abhängigkeit des y von dem x ein Bild verschaffen. Aus der Gleichung

$$y = x^2 + ax + b$$

folgt

$$y = x^2 + ax + \frac{a^2}{4} - \frac{a^2}{4} + b$$
$$= \left(x + \frac{a}{2}\right)^2 - \left(\frac{a^2}{4} - b\right).$$

Gibt man dem x den Wert $-\frac{a}{2}$, für welchen $\left(x + \frac{a}{2}\right)^2 = 0$ wird, so wird für diesen Wert von x die Veränderliche y den kleinsten unter allen für sie möglichen Werten annehmen.

Gibt man nun dem x einen Wert, der um c größer oder kleiner als $-\frac{a}{2}$ ist, setzt also $x = -\frac{a}{2} \pm c$, so wird in beiden Fällen $\left(x + \frac{a}{2}\right)^2 = \left(-\frac{a}{2} \pm c + \frac{a}{2}\right)^2 = (\pm c)^2 = c^2$. Beide Werte für x liefern also denselben Wert für y, und dieser Wert für y wächst mit wachsendem c. Die Linie, welche man erhält, wenn man die durch zusammengehörende Werte von x und y bestimmten Punkte verbindet, wird also symmetrisch liegen zu der Parallelen zur Ordinatenachse durch den Punkt $x = -\frac{a}{2}$ und wird in dieser Parallelen ihren tiefsten Punkt besitzen.

Über die Lage dieses tiefsten Punktes, welchem der kleinste Wert des y entspricht, entscheidet der zweite Klammerausdruck $\left(\frac{a^2}{4} - b\right)$. Man hat dabei drei Fälle zu unterscheiden.

Fall I. $\frac{a^2}{4} - b$ ist positiv. Der tiefste Punkt liegt, da für $x = -\frac{a}{2}$ die Funktion y einen negativen Wert erhält, unterhalb der Abszissenachse. Die Kurve muß demnach die Abszissenachse durchschneiden.

Dies geschieht, wenn $\left(x + \frac{a}{2}\right)^2 - \left(\frac{a^2}{4} - b\right) = 0$ ist, d. h. für die beiden gleichweit von dem Punkte $x = -\frac{a}{2}$ entfernten Punkte, die den Werten $x_1 = -\frac{a}{2} + \sqrt{\frac{a^2}{4} - b}$ und $x_2 = -\frac{a}{2} - \sqrt{\frac{a^2}{4} - b}$ entsprechen, die als Wurzeln der quadratischen Gleichung $x^2 + ax + b = 0$ in § 40 gefunden sind,

Wir wollen diesen Fall an zwei Beispielen erklären.

Beispiel 1. Es sei
$$y = x^2 - 6x + 8$$
$$= (x - 3)^2 - 1.$$

Der tiefste Punkt der Kurve gehört zu $x = 3$. Man erhält ein Bild des Verlaufs der Kurve, wenn man diejenigen Werte von y bestimmt, welche den Werten von x entsprechen, die dem Punkte $x = 3$ auf beiden Seiten benachbart sind. (Fig. 6.)

Tabelle.

x	y
0	+ 8
+ 1	+ 3
+ 2	0
+ 3	− 1
+ 4	0
+ 5	+ 3
+ 6	+ 8

Graphische Darstellung.

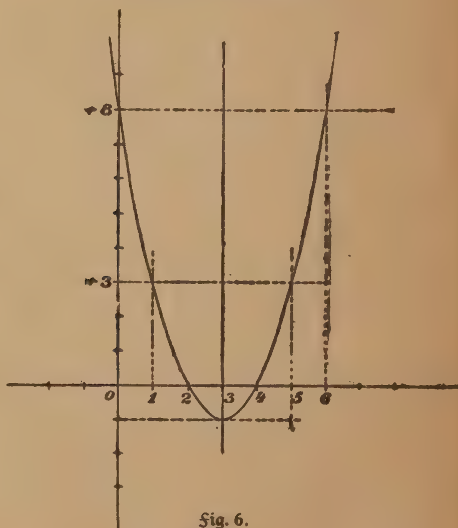


Fig. 6.

Beispiel 2. (Fig. 7.)
$$y = x^2 + 2x - 8$$
$$= (x + 1)^2 - 9.$$

Der tiefste Punkt der Kurve gehört zu dem Werte $x = -1$.

Tabelle. Graphische Darstellung.

x	y
-5	$+7$
-4	0
-3	-5
-2	-8
-1	-9
0	-8
$+1$	-5
$+2$	0
$+3$	$+7$

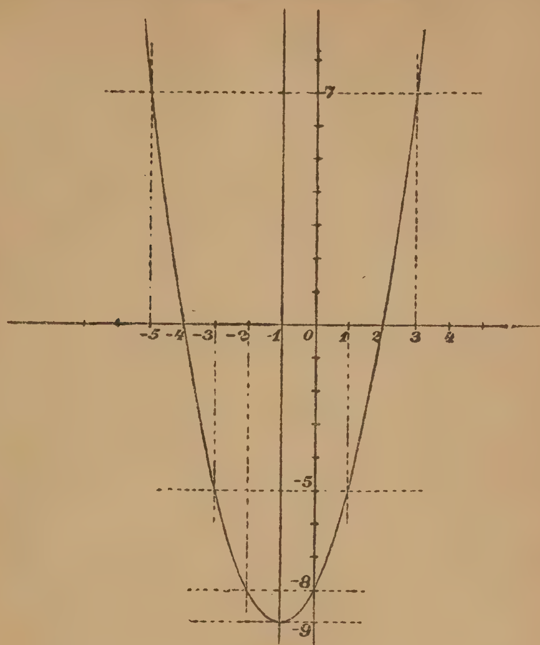


Fig. 7.

Die zu den Schnittpunkten der Kurve mit der Abszissenachse gehörenden Werte des x stellen in beiden Fällen die Wurzeln der quadratischen Gleichung dar, welche man erhält, wenn man die rechte Seite der untersuchten Gleichungen gleich Null setzt.

Fall II. $\frac{a^2}{4} - b$ ist gleich Null. Der tiefste Punkt der Kurve, der zu $x = -\frac{a}{2}$ gehört, liegt auf der Abszissenachse, und die Kurve berührt die Abszissenachse in diesem Punkte. Die beiden Schnittpunkte der Kurve mit der Achse fallen also in einen Punkt zusammen. Die der Funktion entsprechende quadratische Gleichung besitzt zwei gleiche Wurzeln.

Beispiel. (Fig. 8.) $y = x^2 + 4x + 4$

$$= (x + 2)^2$$

Tabelle.

x	y
-4	$+4$
-3	$+1$
-2	0
-1	$+1$
0	$+4$

Graphische Darstellung.

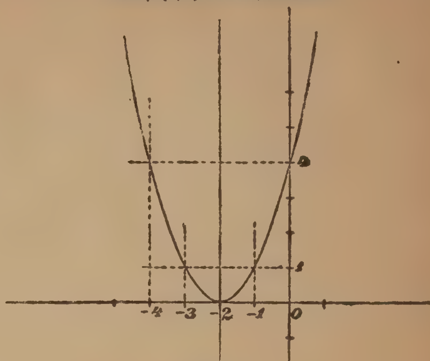


Fig. 8.

Fall III. $\frac{a^2}{4} - b$ **ist negativ.** Der tiefste Punkt liegt, da für $x = -\frac{a}{2}$ die Funktion einen positiven Wert erhält, oberhalb der Abszissenachse, und die Kurve schneidet die Abszissenachse nicht. Die Wurzeln der entsprechenden quadratischen Gleichung sind in diesem Falle nicht reell, sondern komplex.

Beispiel. (Fig. 9.) $y = x^2 - 4x + 5$

$$= (x-2)^2 + 1.$$

Tabelle.

x	y
0	$+5$
$+1$	$+2$
$+2$	$+1$
$+3$	$+2$
$+4$	$+5$

Graphische Darstellung.

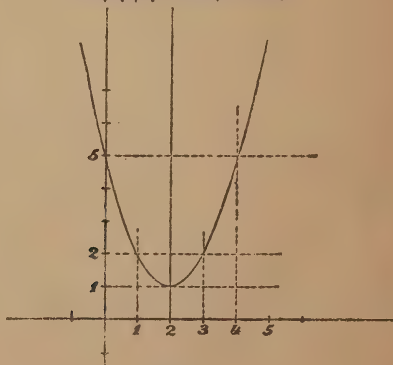


Fig. 9.

Die Kurven, welche uns ein Bild von dem Verlaufe der Funktion $y = x^2 + ax + b$ geben, sind Parabeln. Alle diese Parabeln sind, welche Werte auch a und b besitzen mögen, einander kongruent, wenn die Strecke, durch welche die Einheit dargestellt wird, dieselbe ist. Die Werte von a und b bestimmen lediglich die Lage der Parabel.

Die drei besprochenen Fälle lehren nun, daß die Beschaffenheit der Wurzeln der quadratischen Gleichung $x^2 + ax + b = 0$ abhängig ist von dem Ausdruck $\frac{a^2}{4} - b$. Ist $\frac{a^2}{4} - b$ positiv, so hat die quadratische Gleichung zwei reelle und voneinander verschiedene Wurzeln (Fall I). Ist $\frac{a^2}{4} - b$ gleich Null, so sind die beiden Wurzeln reell und einander gleich (Fall II). Ist endlich $\frac{a^2}{4} - b$ negativ (Fall III), so besitzt die quadratische Gleichung keine reellen Wurzeln, sondern die beiden Wurzeln der Gleichung sind konjugiert komplexe Zahlen (§ 41).

Man nennt den Ausdruck $\frac{a^2}{4} - b$ die Diskriminante der quadratischen Gleichung.

Die Logarithmierung.

§ 48. Begriff der Logarithmierung. Fundamentalsätze.

Außer der in der Wurzelrechnung behandelten Umkehrung der Potenzierung gibt es noch eine zweite Umkehrung dieser Rechnungsart, da man, wie bereits § 32 gesagt, bei einer Potenz die Basis und den Exponenten nicht miteinander vertauschen kann. Man kann die Aufgabe stellen, aus der ausgerechneten Potenz und der Basis den Exponenten zu ermitteln. Ist a die ausgerechnete Potenz und b die Basis, so kann man fragen: Mit welcher Zahl ist b zu potenzieren, damit a als ausgerechnete Potenz herauskommt? Diesen gesuchten Exponenten deutet man symbolisch an durch $\overset{b}{\log}\, a$, gesprochen „Logarithmus von a für die Basis b".

Erklärung: Unter dem Logarithmus von a für die Basis b versteht man diejenige Zahl, mit welcher man b zu potenzieren hat, um a als ausgerechnete Potenz zu erhalten.

Die ausgerechnete Potenz a heißt der Numerus, die gegebene Grundzahl die Basis.

Es ist leicht, den Logarithmus, d. h. den gesuchten Exponenten zu bestimmen, wenn Numerus und Basis als Potenzen derselben Grundzahl gegeben sind. So ist

$$\overset{a^5}{\log}\, a^{10} = 2, \text{ denn es ist } (a^5)^2 = a^{10}$$

$$\overset{a^y}{\log}\, a^x = \frac{x}{y}, \text{ denn es ist } (a^y)^{\frac{x}{y}} = a^{y \cdot \frac{x}{y}} = a^x.$$

Das zweite Beispiel macht es klar, daß man, um den Logarithmus zu finden, falls Numerus und Basis Potenzen derselben Grundzahl sind, nur den Exponenten des Numerus durch den Exponenten der Basis zu dividieren braucht. Der erhaltene Quotient ist dann der gesuchte Logarithmus. Es stellt also der Logarithmus den Quotienten oder die Verhältniszahl der beiden genannten Exponenten dar. Nun heißt aber das Verhältnis auf griechisch λόγος (Lŏgos), die Zahl ἀριϑμός (Arithmós), und daher Verhältniszahl λόγου ἀριϑμός (Logu arithmos). Dies erklärt die Bezeichnung unserer gesuchten Zahl als Logarithmus.

Sind Numerus und Basis als natürliche Zahlen gegeben, so kann man den Logarithmus sofort angeben, wenn man beide Zahlen in Potenzen derselben Basis verwandeln kann.

$$\overset{2}{\log}\, 8 = \overset{2^1}{\log}\, 2^3 = 3; \quad \overset{8}{\log}\, 32 = \overset{2^3}{\log}\, 2^5 = \frac{5}{3};$$

$$\overset{9}{\log}\, 243 = \overset{3^2}{\log}\, 3^5 = 2{,}5; \quad \overset{32}{\log}\, \tfrac{1}{16} = \overset{2^5}{\log}\, 2^{-4} = -0{,}8.$$

Nur die Logarithmen solcher Zahlen, die Potenzen der Basis sind, sind ganze Zahlen. Die Logarithmen aller übrigen Zahlen setzen sich zusammen aus einer ganzen Zahl (**Kennziffer, Charakteristik**) und einem Dezimalbruch (**Mantisse**, mantissa = Zugabe).

Besonders zu merken ist 1. $\overset{a}{\log}\, a = \overset{a^1}{\log}\, a^1 = 1.$

Lehrsatz: Der Logarithmus der Basis ist gleich Eins.

$$2.\ \overset{a}{\log}\, 1 = \overset{a^1}{\log}\, a^0 = 0.$$

Lehrsatz: Der Logarithmus von 1 ist für jede Basis gleich Null.

Besteht zwischen den Zahlen a, b und c die Gleichung $\overset{c}{\log}\, a = b$, so muß auch $c^b = a$ sein. Besteht die Gleichung $a^b = c$, so muß auch $\overset{a}{\log}\, c = b$ sein.

Die Fundamentalsätze der Logarithmierung.

I. **Lehrsatz: Potenziert man eine Zahl mit einem Logarithmus, für welchen diese Zahl die Basis ist, so erhält man den Numerus.**

Behauptung: $b^{\overset{b}{\log}\, a} = a.$

Beweis: $\overset{b}{\log}\, a$ ist diejenige Zahl, mit welcher man b potenzieren muß, um a als ausgerechnete Potenz zu erhalten. Hier ist nun b mit $\overset{b}{\log}\, a$ potenziert, also muß a herauskommen.

Dieser Satz setzt uns in den Stand, jede Zahl als eine Potenz darzustellen, deren Basis wir beliebig wählen können. Soll z. B. 7 als Potenz von 5 dargestellt werden, so ist

$$7 = 5^{\overset{5}{\log}\, 7}.$$

II. Lehrsatz: Der Logarithmus einer Potenz für ihre Basis ist der Exponent der Potenz.

Behauptung: $\overset{a}{\log}\, a^n = n$.

Die Richtigkeit der Behauptung ist nach der Erklärung des Logarithmus selbstverständlich.

§ 49. Vorteile des Rechnens mit Logarithmen.

Schreibt man die ausgerechneten Potenzen von 2 hin und darunter die ihnen gleichen unausgerechneten Potenzen, so erhält man die Reihen

1	2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024	2048	4096	...
2^0	2^1	2^2	2^3	2^4	2^5	2^6	2^7	2^8	2^9	2^{10}	2^{11}	2^{12}	...

In der zweiten Reihe stellen die Exponenten von 2 jedesmal den Logarithmus der in der ersten Reihe darüberstehenden Zahl für die Basis 2 dar.

Soll man nun 32 mit 128 multiplizieren, so kann man statt dessen, wie aus den Reihen ersichtlich, auch 2^5 mit 2^7 multiplizieren, dieser gibt 2^{12}, oder wie man aus der ersten Reihe entnehmen kann, 4096.

Man sieht also, hat man mehrere Zahlen und daneben die ihnen gleichen Potenzen für ein und dieselbe Grundzahl angegeben, so kann man, statt zwei dieser Zahlen zu multiplizieren, die Exponenten der neben ihnen stehenden Potenzen addieren und braucht dann nur, um das gewünschte Produkt zu erhalten, die Potenz aufzusuchen, deren Exponent gleich der erhaltenen Summe ist. Die bei dieser Potenz stehende Zahl ist das gewünschte Produkt. Vorteil: Die Multiplikation ist ersetzt durch eine Addition.

Soll man 2048 durch 128 dividieren, so kann man statt dessen 2^{11} durch 2^7 dividieren. Man erhält 2^4 und findet dabei 16. Vorteil: Die Division ist ersetzt durch eine Subtraktion.

Soll man 16 in die dritte Potenz erheben, so sieht man, daß, weil $16 = 2^4$, die Aufgabe dieselbe ist wie $(2^4)^3 = 2^{12}$. Mithin ist, wie man bei 2^{12} ablesen kann, 4096 die dritte Potenz von 16. Vorteil: Die Potenzierung ist ersetzt durch eine Multiplikation.

Soll man $\sqrt[5]{1024}$ berechnen, so findet man, daß die Aufgabe dieselbe ist wie $\sqrt[5]{2^{10}}$, und da $\sqrt[5]{2^{10}} = 2^2$ ist, so findet man aus der ersten Reihe, daß $\sqrt[5]{1024} = 4$ ist. Vorteil: Die Radizierung ist ersetzt durch eine Division.

Die Basis kommt hierbei nicht in Betracht. Es kommt nur darauf an, daß alle Potenzen dieselbe Basis haben.

Hat man sich also eine Tabelle angefertigt, in welcher entweder oben die Zahlen und darunter die Exponenten der ihnen gleichen Potenzen ein und derselben Grundzahl stehen, oder links die Zahlen und rechts die Exponenten, wie in der folgenden Tabelle,

Numerus	Logarithmus
2	1
4	2
8	3
16	4
32	5
64	6

so braucht man, wenn man zwei Zahlen multiplizieren soll, nur dieselben links aufzusuchen, dann die rechts stehenden Exponenten zu addieren, die Summe rechts aufzusuchen und dann links das gewünschte Produkt abzulesen. Ähnlich ist es für die übrigen Rechnungsarten.

Daß durch die Benutzung der Logarithmen wirklich die oben aus der Tabelle ermittelten Rechenerleichterungen auftreten, läßt sich auch beweisen.

Lehrsatz I: Der Logarithmus eines Produktes ist gleich der Summe der Logarithmen der Faktoren.

Behauptung: $\overset{c}{\log}(ab) = \overset{c}{\log} a + \overset{c}{\log} b$.

Beweis: Setzt man $\overset{c}{\log} a = \alpha$ und $\overset{c}{\log} b = \beta$, dann ist $c^\alpha = a$ und $c^\beta = b$. Aus diesen beiden Gleichungen erhält man durch Multiplikation $c^{\alpha+\beta} = ab$, oder $\overset{c}{\log}(ab) = \alpha + \beta$. Hieraus folgt, wenn man für α und β ihre Werte einsetzt, die Behauptung.

Lehrsatz II. Der Logarithmus eines Bruches ist gleich dem Logarithmus des Zählers vermindert um den Logarithmus des Nenners.

Behauptung: $\overset{c}{\log} \frac{a}{b} = \overset{c}{\log} a - \overset{c}{\log} b$.

Beweis: Setzt man $\overset{c}{\log} a = \alpha$ und $\overset{c}{\log} b = \beta$, so ist $c^\alpha = a$ und $c^\beta = b$. Aus diesen beiden Gleichungen erhält man durch Division $c^{\alpha - \beta} = \frac{a}{b}$, und daraus $\overset{c}{\log} \frac{a}{b} = \alpha - \beta$. Hieraus folgt, wenn man für α und β ihre Werte einsetzt, die Behauptung.

Lehrsatz III: Der Logarithmus einer Potenz ist gleich dem Produkt aus dem Exponenten und dem Logarithmus der Basis.

Behauptung: $\overset{c}{\log} a^n = n \overset{c}{\log} a$.

Beweis: Setzt man $\overset{c}{\log} a = \alpha$, so ist $c^\alpha = a$. Potenziert man diese Gleichung mit n, so erhält man $c^{\alpha \cdot n} = a^n$ und hieraus $\overset{c}{\log} a^n = n \cdot \alpha = n \overset{c}{\log} a$.

Lehrsatz IV: Der Logarithmus einer Wurzel ist gleich dem Logarithmus des Radikandus, dividiert durch den Wurzelexponenten.

Behauptung: $\overset{c}{\log} \sqrt[n]{a} = \frac{1}{n} \overset{c}{\log} a$.

Beweis: Da $\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$, so folgt die Behauptung nach Lehrsatz III.

Beispiele. 1. Ist $x = \frac{ab}{c}$, so ist, wenn man die beliebig zu wählende Basis fortläßt,

$$\log x = \log a + \log b - \log c;$$

2. $x = \frac{a}{bc}$; $\log x = \log a - (\log b + \log c)$.

3. $x = \frac{ab}{cd}$; $\log x = \log a + \log b - \left(\log c + \log d\right)$.

4. $x = a^3 \sqrt[5]{b}$; $\log x = 3 \log a + \frac{1}{5} \log b$.

§ 50. Die dezimalen oder Briggsschen Logarithmen.

Um die Vorteile des Rechnens mit Logarithmen benutzen zu können, braucht man nur alle Zahlen als Potenzen derselben Basis auszudrücken und die Exponenten für diese Basis anzugeben. Alle so erhaltenen Logarithmen für dieselbe Basis bilden ein Logarithmensystem. Es fragt sich nur: 1. Kann man jede Zahl als Basis

eines Logarithmensystems gebrauchen? und 2. Welche von den als Basis brauchbaren Zahlen ist für uns die praktischste?

Was die erste Frage anbetrifft, so erkennt man, daß 1 und 0 als Basis nicht zu gebrauchen sind, da alle Potenzen dieser beiden Zahlen 1 bzw. 0 sind.

Um die zweite Frage zu beantworten, denken wir uns für die Grundzahlen 3, 5 und 10 eine Anzahl von Logarithmen aufgestellt.

Basis 3.		Basis 5.		Basis 10.	
Num.	Log.	Num.	Log.	Num.	Log.
1	0	1	0	1	0
3	1	5	1	10	1
9	2	25	2	100	2
27	3	125	3	1000	3
81	4	625	4	10000	4
243	5	3125	5	100000	5

Aus dieser Aufstellung erkennen wir sofort, daß ein Logarithmensystem nach der Basis 10 einen großen Vorteil gewährt. Da für diese Basis der Logarithmus von 1 gleich 0 und der Logarithmus von 10 gleich 1 ist, so sind die Logarithmen sämtlicher einziffrigen Zahlen gleich 0, vermehrt um einen Dezimalbruch. Da der Logarithmus von 10 gleich 1 und der Logarithmus von 100 gleich 2 ist, so sind die Logarithmen aller zweiziffrigen Zahlen gleich 1, vermehrt um einen Dezimalbruch usw.

Erster Vorteil des dezimalen Logarithmensystems. Man kann aus der Anzahl der Ziffern einer Zahl, deren Logarithmus man bestimmen will, sofort die Kennziffer des Logarithmus ablesen; sie ist um 1 kleiner als die Anzahl der Ziffern der Zahl.

Es war dies ein Grund, weshalb man die Logarithmen nach der Basis 10 einführte. Bei ihnen pflegt man die Basis nicht zu schreiben, schreibt man also einfach log 100, so meint man stets ${}^{10}\log 100$. Wie die zu der Kennziffer hinzutretende Mantisse berechnet wird, kann auf dieser Stufe nicht auseinandergesetzt werden. Es genügt zu bemerken, daß diese Mantissen in besonderen Tafeln, den Logarithmentafeln, zu finden sind. Von einer solchen Logarithmentafel, der Tafel von August, ist hier ein Teil einer Seite abgedruckt.

Fünfziffrige Mantissen.

N.	*L.*	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	*P. P.*	
310	49	136	150	164	178	192	206	220	234	248	262	14	
311		276	290	304	318	332	346	360	374	388	402	1	1,4
312		415	429	443	457	471	485	499	513	527	541	2	2,8
313		554	568	582	596	610	624	638	651	665	679	3	4,2
314		693	707	721	734	748	762	776	790	803	817	4	5,6
												5	7,0
315		831	845	859	872	886	900	914	927	941	955	6	8,4
316		969	982	996	*010	*024	*037	*051	*065	*079	*092	7	9,8
317	50	106	120	133	147	161	174	188	202	215	229	8	11,2
318		243	256	270	284	297	311	325	338	352	365	9	12,6

Soll man z. B. log 3127 bestimmen, so folgt aus dem Vorhergesagten, daß die Kennziffer 3 ist. Um die Mantisse zu ermitteln, sucht man in der Tafel die drei ersten Ziffern des Numerus 312 in der mit *N.* (Numerus) überschriebenen Vertikalreihe auf, dann sucht man die vierte Ziffer 7 in derselben Horizontalreihe, in welcher *N.* steht. Diejenigen Ziffern nun, die an der Stelle stehen, wo die Horizontalreihe durch 312 und die Vertikalreihe durch 7 sich kreuzen, hier also die Ziffern 513, sind die dritte, vierte und fünfte Ziffer der gesuchten Mantisse. Die beiden ersten Ziffern der Mantisse sind die beiden in der Vertikalreihe unter *L* (Logarithmus) stehenden Ziffern, die entweder mit der gefundenen Zahl in derselben Horizontalreihe oder darüber stehen, also hier 49, es ist also log 3127 = 3,49513. In ähnlicher Weise findet man log 3174 = 3,50161. Will man log 3165 aufsuchen, so stößt man bei Ermittlung der Mantisse auf die Zahl 037, vor der ein Stern* steht. Dieser Stern bedeutet, daß die beiden ersten Ziffern die t i e f e r als die gefundene Zahl stehenden Ziffern sind.

Es ist demnach log 3165 = 3,50037.

Es sieht aus, als ob die Logarithmentafeln nur für das Aufschlagen der Mantisse zu einer vierziffrigen Zahl brauchbar wären. Nun ist aber

$$1.\quad \log 312{,}7 = \log \frac{3127}{10} = \log 3127 - \log 10$$

$$\log 3127 = 3{,}49513$$

$$\log 10 = 1{,}00000$$

$$\overline{\log 312{,}7 = 2{,}49513.}$$

$$2.\quad \log 3{,}127 = \log \frac{3127}{1000} = \log 3127 - \log 1000$$

$$\begin{array}{r} \log 3127 = 3{,}49513 \\ \log 1000 = 3{,}00000 \\ \hline \log 3{,}127 = 0{,}49513. \end{array}$$

Aus diesen Beispielen ist ersichtlich:

Der zweite Vorteil des Rechnens mit dezimalen Logarithmen. Die Logarithmen der mit denselben Ziffern geschriebenen Zahlen haben stets dieselbe Mantisse, das Komma dient lediglich zur Bestimmung der Kennziffer. Unsere Logarithmentafeln sind also für alle Zahlen brauchbar. log 2, log 20, log 200 haben dieselbe Mantisse wie log 2000, nur eine andere Kennziffer.

§ 51. Das Interpolieren.

Wir sind jetzt imstande, die Logarithmen aller Zahlen, die größer als 1 sind (ganze Zahlen und unechte Dezimalbrüche), welche mit vier Ziffern geschrieben werden, zu ermitteln. Besitzt die Zahl noch eine fünfte Ziffer, sucht man z. B. log 31,326, so ist die Mantisse, welche zu den Ziffern 3132 gehört, zu klein, die zu den Ziffern 3133 gehörende zu groß. Man kann dann die genauere Mantisse berechnen, mit Hilfe einer Proportion auf Grund der erst auf höherer Stufe beweisbaren Tatsache, daß die Änderungen, welche die letzte Ziffer einer vierstelligen Zahl erfährt, annähernd den Änderungen der Mantisse proportional sind. Man macht daher in unserem Falle folgende Schlüsse:

Ändert sich die vierte Ziffer des Numerus um 1, so ändern sich die letzten Ziffern der Mantisse um 14 (durch Subtraktion der benachbarten Mantissen ermittelt).

Ändert sich die vierte Ziffer des Numerus um 0,6, so ändern sich die letzten Ziffern der Mantisse um $0{,}6 \cdot 14 = 8{,}4$ oder 8. Addiert man nun zu der bei 3132 stehenden Mantisse 49582 die 8, so findet man

$$\log 31{,}326 = 1{,}49590.$$

Man nennt dies Verfahren das Interpolieren der Logarithmen. Zur Erleichterung der stets dabei nötigen kleinen Multiplikationen befinden sich in den Logarithmentafeln an der Stelle, über welcher *P. P.* (Partes proportionales) steht, kleine Täfelchen, über denen die aus den Tafeln zu ermittelnde Differenz (hier 14) steht. Vor dem unter dieser Differenz befindlichen vertikalen Strich stehen die Zahlen von 1 bis 9, die als fünfte Ziffer auftreten können. Da-

hinter stehen die Produkte dieser Zahlen mit der darüber befindlichen Differenz, bereits durch 10 dividiert. Die vor dem Komma stehenden Zahlen, die man beim Weglassen der Zahl nach dem Komma eventuell zu erhöhen hat, sind diejenigen Zahlen, welche zu den letzten Ziffern der Mantisse addiert werden müssen.

Beispiel: log 311,58 = 2,49357
log 3,1073 = 0,49238.

§ 52. Das Aufsuchen des Numerus.

Jedes Rechnen mit Logarithmen erfordert am Schluß ein Zurückgehen von den Logarithmen auf die gewöhnlichen Zahlen, es erfordert ein Aufschlagen des Numerus zu dem gefundenen Logarithmus. Hat man gefunden $\log x = 2{,}49748$, so erkennt man zunächst aus der Kennziffer 2, daß x eine Zahl sein muß, welche drei Ziffern vor dem Komma besitzt. Man schreibt daher

$$x = \cdot\cdot\cdot,$$

gesprochen „x gleich Punkt, Punkt, Punkt, Komma". Hierauf sucht man in der mit L überschriebenen Abteilung zuerst unter dem L die beiden ersten Ziffern der Mantisse (hier 49) auf und dann unter den in Gruppen zu drei Ziffern stehenden Zahlen die drei letzten Ziffern. Hat man sie gefunden, dann stehen in derselben Horizontalreihe unter N die drei ersten Ziffern des Numerus (hier 314), und in derselben Vertikalreihe in der obersten Zeile in gleicher Höhe mit L steht die vierte Ziffer (hier 4). Es ist also

$$x = 314{,}4.$$

Beispiel: $\log x = 1{,}50325; \quad x = 31{,}86$
$\log x = 0{,}49707; \quad x = 3{,}141.$

Aufgabe: Die Seiten eines Rechtecks sind a cm ($a = 23{,}42$) und b cm ($b = 4{,}163$). Wie groß ist der Inhalt?

Lösung: Es ist, wenn man die Maßzahl des Inhalts durch f bezeichnet, $f = ab$. Diese Gleichung „wird logarithmiert", d. h. man bildet auf beiden Seiten die Logarithmen. Dadurch erhält man

$$\log f = \log a + \log b$$
$$\log a = 1{,}36959$$
$$\log b = 0{,}61941$$
$$\overline{\log f = 1{,}98900; \quad f = 97{,}50.}$$

Der Inhalt ist 97,50 qcm groß.

Aufgabe: Der Inhalt eines Rechtecks ist f qcm ($f = 357{,}6$), und die eine Seite a cm ($a = 16{,}54$). Wie groß ist die andere Seite?

Lösung: $f = ab$; $b = \frac{f}{a}$; $\log b = \log f - \log a$.

$$\begin{array}{l} \log f = 2{,}55340 \\ \log a = 1{,}21854 \\ \hline \log b = 1{,}33486;\ b = 21{,}62. \end{array}$$

Die andere Seite ist 21,62 cm lang.

Aufgabe: Ein Rechteck, dessen eine Seite a cm ($a = 84{,}576$) lang ist, hat denselben Inhalt wie ein Dreieck, dessen Grundlinie g cm ($g = 121{,}74$) und dessen Höhe h cm ($h = 5{,}47$) beträgt. Wie groß ist die zweite Seite des Rechtecks?

Lösung: Nennt man die Maßzahl der zweiten Seite x, dann besteht die Gleichung:

$$ax = \frac{g \cdot h}{2};\ x = \frac{g \cdot h}{2 \cdot a}$$

$$\log x = \underbrace{\log g + \log h}_{\log Z\ (\text{Zähler})} - \underbrace{(\log 2 + \log a)}_{\log N\ (\text{Nenner}).}$$

$$\begin{array}{l} \log g = 2{,}08543 \\ \log h = 0{,}73799 \\ \hline \log Z = 2{,}82342 \\ \log N = 2{,}22828 \\ \hline \log x = 0{,}59514;\ x = \cdot, \end{array} \qquad \begin{array}{l} \log 2 = 0{,}30103 \\ \log a = 1{,}92725 \\ \hline \log N = 2{,}22828 \end{array}$$

Die gefundene Mantisse steht nicht in den Tafeln. In einem solchen Falle findet man den Numerus wieder durch Interpolieren. Man schlägt die nächstkleinere Mantisse auf. Hierdurch findet man in unserem Falle 59506 und dadurch für den Numerus die Zahl 3,936. Nun stellt man folgende Überlegung an:

Wächst die gefundene Mantisse (59506) um 11 (die Differenz mit der nächstgrößeren Mantisse), so wächst die letzte Ziffer des Numerus um 1, wächst also die gefundene Mantisse um 1, so wächst die letzte Ziffer des Numerus um $\frac{1}{11}$. Wächst nun aber die gefundene Mantisse bis zu dem Werte, den man aufschlagen wollte (59514), d. h. um 8, so muß die letzte Ziffer des Numerus wachsen um $\frac{8}{11} = 0{,}72$. Demnach ist, wenn wir nur eine Stelle berücksichtigen,

$$x = 3{,}9367.$$

Die zweite Seite des Rechtecks ist 3,9367 cm lang.

§ 53. Die Logarithmen echter Brüche und negativer Zahlen.

I. Da die Logarithmen mit abnehmendem Numerus stets kleiner werden, so folgt aus der Tatsache, daß log 1 = 0 ist, daß die Logarithmen sämtlicher Zahlen, die kleiner als 1 sind, negativ sein müssen. Es ist auch

$$\overset{10}{\log} 0{,}1 = \overset{10}{\log} \frac{1}{10} = \overset{10}{\log}{}^{+1}\ 10^{-1} = -1$$

$$\overset{10}{\log} 0{,}01 = \overset{10}{\log}{}^{+1}\ 10^{-2} = -2 \text{ usw.}$$

Ist nun der Logarithmus eines echten Bruches zu ermitteln, z. B. log 0,005436, so formt man die gegebene Zahl so um, daß das Komma hinter die erste von Null verschiedene Ziffer tritt. Da dies bei unserer Zahl einem Multiplizieren mit 1000 entspricht, so muß man, damit der Wert des Numerus sich nicht ändert, nach der Verschiebung des Kommas durch 1000 dividieren. Man erhält

$$\log 0{,}005436 = \log \frac{5{,}436}{1000} = \log 5{,}436 - \log 1000$$
$$= 0{,}73528 - 3.$$

In dieser Form läßt man den Logarithmus stehen, ohne die Differenz auszurechnen, und nennt 0, . . . — 3, gesprochen „Null Komma minus 3", die Kennziffer desselben. Ähnlich findet man

$$\log 0{,}7234 = 0{,}85938 - 1$$
$$\log 0{,}02126 = 0{,}32756 - 2.$$

Regel: Die Logarithmen der echten Dezimalbrüche haben als Kennziffer 0, . . . — n, wenn n die Zahl der Stellen bedeutet, um welche man das Komma zu verschieben hat, damit es hinter die erste von Null verschiedene Ziffer des Dezimalbruches tritt.

Der Numerus zu einem Logarithmus, dessen Kennziffer 0, . . . — 2 ist, beginnt 0,0 . . . Ist die Kennziffer 0, . . . — 3, so beginnt er 0,00 . .

II. Die Logarithmen negativer Zahlen sind durch keine positive oder negative reelle Zahl darstellbar, da jede Potenz von 10, mag der Exponent positiv oder negativ sein, eine positive Zahl ist. Dies gilt auch für jede andere Basis. Die Logarithmen negativer Zahlen sind komplexe Zahlen.

$$\log(-7) = \log(i^2 \cdot 7) = 2\log i + \log 7.$$

§ 54. Einige Aufgaben über das Logarithmieren von Potenzen und Wurzeln.

1. **Aufgabe:** Der Radius eines Kreises ist r cm (r = 0,52). Wie groß ist der Inhalt?

Es ist $k = \pi r^2$ $\quad \log k = \log \pi + 2 \log r$

$$\log r = 0{,}71600 - 1$$

$$\log \pi = 0{,}49715$$
$$2 \log r = 1{,}43200 - 2$$
$$\log k = 1{,}92915 - 2 = 0{,}92915 - 1$$
$$k = 0{,}84948$$

Der Inhalt ist 0,84948 qcm groß.

2. **Aufgabe:** x zu berechnen aus der Gleichung $x = \frac{2{,}947^6 \cdot 0{,}0087^7}{14{,}58^3 \cdot 0{,}000635^5}$.

Es ist $\quad \log x = 6 \log 2{,}947 + 7 \log 0{,}0087 - (3 \log 14{,}58 + 5 \log 0{,}000635)$.

Man schlägt zunächst die Logarithmen der hinter dem Logarithmenzeichen stehenden Zahlen auf.

$$\log 2{,}947 = 0{,}46938 \qquad \log 14{,}58 = 1{,}16376$$
$$\log 0{,}0087 = 0{,}93952 - 3 \qquad \log 0{,}000635 = 0{,}80277 - 4$$

$$6 \log 2{,}947 = 2{,}81628 \qquad 3 \log 14{,}58 = 3{,}49128$$
$$7 \log 0{,}0087 = 6{,}57664 - 21 \qquad 5 \log 0{,}000635 = 4{,}01385 - 20$$
$$\log Z = 9{,}39292 - 21 \qquad \log N = 7{,}50513 - 20$$
$$\log N = 7{,}50513 - 20$$
$$\log x = 1{,}88779 - 1 = 0{,}88779$$
$$x = 7{,}723.$$

3. **Aufgabe:** Der Inhalt eines Dreiecks ist f qcm ($f = 27{,}43$) und die Grundlinie g cm ($g = 105{,}7$). Wie groß ist die Höhe?

$$f = \frac{g \cdot h}{2};\ h = \frac{2f}{g}$$
$$\log h = \log 2 + \log f - \log g$$
$$\log 2 = 0{,}30103$$
$$\log f = 1{,}43823$$
$$\log Z = 1{,}73926$$
$$\log g = 2{,}02407$$

Ist, wie in diesem Falle, der Minuendus kleiner als der Subtrahendus, so fügt man im Minuendus so viel Ganze hinzu, daß die Zahl größer wird als der Subtrahendus, und subtrahiert die zugefügten Ganzen am Ende des Minuendus. Hier schreibt man also

$$\log Z = 2{,}73926 - 1$$
$$\log g = 2{,}02407$$
$$\log h = 0{,}71519 - 1;\; h = 0{,}51903.$$

Die Höhe beträgt 0,51903 cm.

4. Aufgabe: $x = \sqrt[3]{237{,}67}$ zu berechnen.

Es ist $x^3 = 237{,}67$; $3 \log x = \log 237{,}67$

$$= 2{,}37598$$
$$\log x = 0{,}79199;\; x = 6{,}1943.$$

5. Aufgabe: $x = \sqrt[5]{0{,}0478}$ zu berechnen.

Es ist $x^5 = 0{,}0478$; $5 \log x = \log 0{,}0478$

$$= 0{,}67943 - 2.$$

Bevor man hier die Division durch 5 ausführt, muß man den Logarithmus so umformen, daß die am Ende subtrahierte Zahl durch 5 ohne Rest teilbar ist. Man schreibt daher

$$5 \log x = 3{,}67943 - 5$$
$$\log x = 0{,}73589 - 1$$
$$x = 0{,}54436.$$

§ 55. Der Logarithmus einer Summe.

Eine Summe und eine Differenz kann man nicht logarithmieren und daher auch nicht mit Logarithmen unmittelbar berechnen. Sind die einzelnen Summanden aber so unbequeme Zahlen, daß man eine Berechnung mit Logarithmen vorziehen würde, so muß man jeden Summanden für sich berechnen und dann die für die einzelnen Summanden gefundenen Numeri addieren. Ein Beispiel möge dies klar machen.

Aufgabe: In einem rechtwinkligen Dreieck sind die Katheten a cm ($a = 47{,}568$) und b cm ($b = 59{,}477$) lang. Wie lang ist die Hypotenuse?

Ist die Maßzahl der Hypotenuse c, dann ist

$$c^2 = a^2 + b^2$$

$\log a = 1{,}67731$	$\log b = 1{,}77435$
$2 \log a = 3{,}35462$	$2 \log b = 3{,}54870$
$a^2 = 2262{,}7$	$b^2 = 3537{,}5$

$$c^2 = a^2 + b^2 = 5800{,}2$$
$$2 \log c = \log 5800{,}2 = 3{,}76344$$
$$\log c = 1{,}88172$$
$$c = 76{,}158.$$

Die Hypotenuse ist 76,158 cm lang.

Nur wenn man auf eine Differenz zweier Quadrate kommt, läßt sich die Berechnung mit Logarithmen durch Anwendung der Formel $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$ einfacher ausführen. Dies ist z. B. der Fall, wenn man in einem rechtwinkligen Dreieck, dessen Hypotenuse c cm und dessen eine Kathete a cm lang sind, die zweite Kathete berechnen soll. Es ist dann

$$b^2 = c^2 - a^2 = (c + a)(c - a)$$
$$2 \log b = \log (c + a) + \log (c - a).$$

Übersicht über die sieben Rechnungsarten.

I. **Die Addition.** Erste Hauptrechnungsart.
Addiert man die Zahl b zu der Zahl a, so erhält man $a + b$, a und b heißen **Summanden**, $a + b$ heißt **Summe.**

II. **Die Subtraktion.** Umkehrung der Addition.
Subtrahiert man die Zahl b von der Zahl a, so erhält man $a - b$. a heißt **Minuendus**, b heißt **Subtrahendus**, $a - b$ heißt **Differenz.**
Erste Erweiterung des Zahlengebietes: die algebraischen Zahlen.

III. **Die Multiplikation.** Zweite Hauptrechnungsart, eine Addition gleicher Summanden.
Multipliziert man die Zahl b mit der Zahl a, so erhält man $a \cdot b$. a heißt **Multiplikator**, b heißt **Multiplikandus**, $a \cdot b$ heißt **Produkt.** a und b heißen auch mit gemeinsamem Namen **Faktoren.**

IV. **Die Division.** Umkehrung der Multiplikation.
Dividiert man die Zahl a durch die Zahl b, so erhält man $\frac{a}{b}$ oder $a : b$. a heißt **Dividendus**, b heißt **Divisor**, $\frac{a}{b}$ heißt **Quotient.**
Zweite Erweiterung des Zahlengebietes: die Brüche.

V. **Die Potenzierung.** Dritte Hauptrechnungsart, eine Multiplikation gleicher Faktoren.
Potenziert man die Zahl a mit der Zahl n, so erhält man a^n. a heißt **Grundzahl oder Basis**, n heißt **Exponent**, a^n heißt **Potenz.**

VI. **Die Radizierung.** Erste Umkehrung der Potenzierung, die Grundzahl oder Basis wird gesucht. Radiziert man die Zahl a mit der Zahl n, so erhält man $\sqrt[n]{a}$.
a heißt **Radikandus**, n heißt **Wurzelexponent**, $\sqrt[n]{a}$ heißt **Wurzel.**
Dritte Erweiterung des Zahlengebietes: die irrationalen Zahlen.
Vierte Erweiterung des Zahlengebietes: die imaginären Zahlen.

VII. **Die Logarithmierung.** Zweite Umkehrung der Potenzierung, der Exponent wird gesucht.
Logarithmiert man die Zahl a nach der Basis b, so erhält man $\overset{b}{\log}\, a$.
a heißt **Numerus,** b heißt **Basis,** $\overset{b}{\log}\, a$ heißt **Logarithmus.**

Die Primzahlen von 1 bis 500.

1	2	3	5	7	11
13	17	19	23	29	31
37	41	43	47	53	59
61	67	71	73	79	83
89	97	101	103	107	109
113	127	131	137	139	149
151	157	163	167	173	179
181	191	193	197	199	211
223	227	229	233	239	241
251	257	263	269	271	277
281	283	293	307	311	313
317	331	337	347	349	353
359	367	373	379	383	389
397	401	409	419	421	431
433	439	443	449	457	461
463	467	479	487	491	499

Die Quadrate und die Quadratwurzeln der Zahlen von 1 bis 100.

n	n^2	$\sqrt{n}$	n	n^2	$\sqrt{n}$
1	1	1,0000	5	25	2,2361
2	4	1,4142	6	36	2,4495
3	9	1,7321	7	49	2,6458
4	16	2,0000	8	64	2,8284

n	n^2	$\sqrt{n}$	n	n^2	$\sqrt{n}$
9	81	3,0000	55	3025	7,4162
10	100	3,1623	56	3136	7,4833
11	121	3,3166	57	3249	7,5498
12	144	3,4641	58	3364	7,6158
13	169	3,6056	59	3481	7,6811
14	196	3,7417	60	3600	7,7460
15	225	3,8730	61	3721	7,8102
16	256	4,0000	62	3844	7,8740
17	289	4,1231	63	3969	7,9373
18	324	4,2426	64	4096	8,0000
19	361	4,3589	65	4225	8,0623
20	400	4,4721	66	4356	8,1240
21	441	4,5826	67	4489	8,1854
22	484	4,6904	68	4624	8,2462
23	529	4,7958	69	4761	8,3066
24	576	4,8990	70	4900	8,3666
25	625	5,0000	71	5041	8,4261
26	676	5,0990	72	5184	8,4853
27	729	5,1962	73	5329	8,5440
28	784	5,2915	74	5476	8,6023
29	841	5,3852	75	5625	8,6603
30	900	5,4772	76	5776	8,7178
31	961	5,5678	77	5929	8,7750
32	1024	5,6569	78	6084	8,8318
33	1089	5,7446	79	6241	8,8882
34	1156	5,8310	80	6400	8,9443
35	1225	5,9161	81	6561	9,0000
36	1296	6,0000	82	6724	9,0554
37	1369	6,0828	83	6889	9,1104
38	1444	6,1644	84	7056	9,1652
39	1521	6,2450	85	7225	9,2195
40	1600	6,3246	86	7396	9,2736
41	1681	6,4031	87	7569	9,3274
42	1764	6,4807	88	7744	9,3808
43	1849	6,5574	89	7921	9,4340
44	1936	6,6332	90	8100	9,4868
45	2025	6,7082	91	8281	9,5394
46	2116	6,7823	92	8464	9,5917
47	2209	6,8557	93	8649	9,6437
48	2304	6,9282	94	8836	9,6954
49	2401	7,0000	95	9025	9,7468
50	2500	7,0711	96	9216	9,7980
51	2601	7,1414	97	9409	9,8489
52	2704	7,2111	98	9604	9,8995
53	2809	7,2801	99	9801	9,9499
54	2916	7,3485	100	10000	10,0000

Register.

Die angegebenen als unverbindlich anzusehenden Preise sind Grundpreise. Die Ladenpreise ergeben sich für den allgemeinen Verlag aus halbiertem Grundpreis × Schlüsselzahl des Börsenvereins (z. Zt. April 1923: 2500), für Schulbücher (mit * bezeichnet) aus vollem Grundpreis × besondere Schlüsselzahl (z. Zt. 600).

Mathematisch-Physikalische Bibliothek

Gemeinverständliche Darstellungen aus der Mathematik u. Physik. Unter Mitwirkung von Fachgenossen hrsg. von

Dr. W. Lietzmann und **Dr. A. Witting**

Oberstud.-Dir. d. Oberrealschule zu Göttingen — Oberstudienrat, Gymnasialpr. i. Dresden

Fast alle Bändchen enthalten zahlreiche Figuren. kl. 8. Kart. je M. 1.40

Die Sammlung, die in einzeln käuflichen Bändchen in zwangloser Folge herausgegeben wird, bezweckt, allen denen, die Interesse an den mathematisch-physikalischen Wissenschaften haben, es in angenehmer Form zu ermöglichen, sich über das gemeinhin in den Schulen Gebotene hinaus zu belehren. Die Bändchen geben also teils eine Vertiefung solcher elementarer Probleme, die allgemeinere kulturelle Bedeutung oder besonderes wissenschaftliches Gewicht haben, teils sollen sie Dinge behandeln, die den Leser, ohne zu große Anforderungen an seine Kenntnisse zu stellen, in neue Gebiete der Mathematik und Physik einführen.

Bisher sind erschienen (1912/23):

Der Begriff der Zahl in seiner logischen und historischen Entwicklung. Von H. Wieleitner. 2., durchgeseh. Aufl. (Bd. 2.)
Ziffern und Ziffernsysteme. Von E. Löffler. 2., neubearb. Aufl. I: Die Zahlzeichen der alten Kulturvölker. (Bd. 1.) II: Die Z. im Mittelalter und in der Neuzeit. (Bd. 34.)
Die 7 Rechnungsarten mit allgemeinen Zahlen. Von H. Wieleitner. 2. Aufl. (Bd. 7.)
Abgekürzte Rechnung. V. A. Witting. (Bd. 47)
Einführung in die Infinitesimalrechnung. Von A. Witting. 2. Aufl. I: Die Differential-, II: Die Integralrechnung. (Bd. 9 u. 41.)
Wahrscheinlichkeitsrechnung. V. O. Meißner. 2. Auflage. I: Grundlehren. (Bd. 4.) II: Anwendungen. (Bd. 33.)
Vom periodischen Dezimalbruch zur Zahlentheorie. Von A. Leman. (Bd. 19.)
Kreisevolventen und ganze algebraische Funktionen. Von H. Onnen. (Bd. 51.)
Der pythagoreische Lehrsatz mit einem Ausblick auf das Fermatsche Problem. Von W. Lietzmann. 2. Aufl. (Bd. 3.)
Methoden zur Lösung geometrischer Aufgaben. Von B. Kerst. (Bd. 26.)
Einführung in die Trigonometrie. Von A. Witting (Bd. 43.)
Nichteuklidische Geometrie in der Kugelebene. Von W. Dieck. (Bd. 31.)
Der Goldene Schnitt. V. H. E. Timerding. (32.)
Ebene Geometrie. Von B. Kerst. (Bd. 10.)
Darstellende Geometrie d. Geländes u. verw. Anwend. d. Methode d. kotiert. Projektionen. Von R. Rothe. 2., verb. Aufl. (Bd. 35/36.)
Konstruktionen in begrenzter Ebene. Von P. Zühlke. (Bd. 11.)
Einführung in die projektive Geometrie. Von M. Zacharias. 2. Aufl. (Bd. 6.)
Funktionen, Schaubilder, Funktionstafeln. Von A. Witting. (Bd. 48.)
Einführung i. d. Nomographie. V. P. Luckey. I. Die Funktionsleiter (28.) II. Die Zeichnung als Rechenmaschine. (37.)
Theorie und Praxis des logarithm. Rechenschiebers. V. A. Rohrberg. 2. Aufl. (Bd. 23.)
Die Anfertigung mathemat. Modelle. (Für Schüler mittl. Kl.) Von K. Giebel. (Bd. 16.)
Karte und Kroki. Von H. Wolff. (Bd. 27.)
Die Grundlagen unserer Zeitrechnung. Von A. Baruch. (Bd. 29.)
Die mathemat. Grundlagen d. Variations- u. Vererbungslehre. Von P. Riebesell. (24.)
Mathematik u. Biologie. V. M. Schips. (Bd. 42.)
Beispiele zur Geschichte der Mathematik. Von A. Witting und M. Gebhard. (Bd. 15.)
Wie man einstens rechnete. Von Studienrat E. Fettweis. (Bd. 49.)
Mathematiker-Anekdoten. Von W. Ahrens. 2. Aufl. (Bd. 18.)
Die Quadratur d. Kreises. Von E. Beutel. 2. Aufl. (Bd. 12.)
Wo steckt der Fehler? Von W. Lietzmann und V. Trier. 3. Aufl. (Bd. 52.)
Trugschlüsse. Gesammelt von W. Lietzmann. 3. Aufl. des 1. Teiles von: Wo steckt der Fehler? (Bd. 53.)
Geheimnisse der Rechenkünstler. Von Ph. Maennchen. 2. Aufl. (Bd. 13.)
Riesen und Zwerge im Zahlenreiche. Von W. Lietzmann. 2. Aufl. (Bd. 25.)
Die mathematischen Grundlagen der Lebensversicherung. Von H. Schütze. (Bd. 46.)
Die Fallgesetze. Von H. E. Timerding. 2. Aufl. (Bd. 5.)
Atom- und Quantentheorie. Von P. Kirchberger. (Bd. 44/45.)
Ionentheorie. Von P. Bräuer. (Bd. 38.)
Das Relativitätsprinzip. Leichtfaßlich entwickelt von A. Angersbach. (Bd. 39.)
Dreht sich die Erde? Von W. Brunner. (17.)
Theorie der Planetenbewegung. Von P. Meth. 2., umg. Aufl. (Bd. 8.)
Beobachtung d. Himmels mit einfach. Instrumenten. Von Fr. Rusch. 2. Aufl. (Bd. 14.)
Mathem. Streifzüge durch die Geschichte der Astronomie. Von P. Kirchberger. (Bd. 40.)

In Vorbereitung: Herold, Zinseszins-, Renten- und Anleiherechnung. Wicke, Konforme Abbildungen. Winkelmann, Der Kreisel. Wolff, Feldmessen und Höhenmessen.

Verlag von B. G. Teubner in Leipzig und Berlin

Anfragen ist Rückporto beizufügen

Die angegeb. als unverbindlich anzusehenden Preise sind Grundpreise. Die Ladenpreise ergeben sich aus halbiertem Grundpreis × Schlüsselzahl des Börsenvereins (März 1923: 2000).

Teubners kleine Fachwörterbücher

geben rasch und zuverlässig Auskunft auf jedem Spezialgebiete und lassen sich je nach den Interessen und den Mitteln des einzelnen nach und nach zu einer Enzyklopädie aller Wissenszweige erweitern.

„Mit diesen kleinen Fachwörterbüchern hat der Verlag Teubner wieder einen sehr glücklichen Griff getan. Sie ersetzen tatsächlich für ihre Sondergebiete ein Konversationslexikon und werden gewiß großen Anklang finden.“ (Deutsche Warte.)

„Wer ist jetzt in der Lage, teuere Nachschlagebücher zu kaufen? Wie viele aus den Reihen der Volkshochschulbesucher verlangen nach Handreichungen, die das Studium der Natur- und Geisteswissenschaften ermöglichen. Die Erklärungen sind sachlich zutreffend und so kurz als möglich gegeben, das Sprachliche ist gründlich erfaßt, das Wesentliche berücksichtigt. Die Bücher sind eine glückliche Ergänzung der Bändchen „Aus Natur und Geisteswelt“ des gleichen Verlags. Selbstverständlich ist dem neuesten Stande der Wissenschaft Rechnung getragen.“ (Sächsische Schulzeitung.)

„Diese handlichen Nachschlagebücher bieten nach Form und Inhalt Vorzügliches und werden sich, wie zu erwarten steht, in unseren Volksbüchereien schnell einbürgern.“ (Blätter für Volksbibliotheken.)

Bisher erschienen:

Jeder Band gebunden M. 5.—

- **Philosophisches Wörterbuch.** 3. Aufl. Von Studienrat Dr. P. Thormeyer. (Bd. 4.)
- **Psychologisches Wörterbuch** von Dr. Fritz Giese. Mit 60 Fig. (Bd. 7.)
- **Wörterbuch zur deutschen Literatur** von Studienrat Dr. H. Röhl. (Bd. 14.)
- ***Musikalisches Wörterbuch** von Privatdoz. Dr. H. J. Moser. (Bd. 12.)
- ***Wörterbuch zur Kunstgeschichte** von Dr. H. Vollmer.
- **Physikalisches Wörterbuch** von Prof. Dr. G. Berndt. Mit 81 Fig. (Bd. 5.)
- ***Chemisches Wörterbuch** von Prof. Dr. H. Remy. (Bd. 10.)
- ***Astronomisches Wörterbuch** v. Observator Dr. H. Naumann. (Bd. 11.)
- **Geologisch-mineralogisches Wörterbuch** von Dr. C. W. Schmidt. Mit 211 Abb. (Bd. 6.)
- **Geographisches Wörterbuch** von Prof. Dr. O. Kende. I. Allgem. Erdkunde. Mit 81 Abb. (Bd. 8.) *II. Wörterbuch der Länder- und Wirtschaftskunde. (Bd. 13.)
- **Zoologisches Wörterbuch** von Direktor Dr. Th. Knottnerus-Meyer. (Bd. 2.)
- **Botanisches Wörterbuch** von Dr. O. Gerke. Mit 103 Abb. (Bd. 1.)
- **Wörterbuch der Warenkunde** von Prof. Dr. M. Pietsch. (Bd. 3.)
- **Handelswörterbuch** von Handelsschuldirektor Dr. V. Sittel und Justizrat Dr. M. Strauß. Zugleich fünfsprachiges Wörterbuch, zusammengestellt von V. Armhaus, verpfl. Dolmetscher. (Bd. 9.)

* in Vorbereitung bzw. unter der Presse (1923)

Verlag von B. G. Teubner in Leipzig und Berlin

N III. 23

Anfragen ist Rückporto beizufügen

Die angegebenen als unverbindlich anzusehenden Preise sind Grundpreise, die z. Zt. (März 1923) mit der Teuerungsziffer 1000 zu vervielfältigen sind.

Teubners Künstlersteinzeichnungen

Wohlfeile farbige Originalwerke erster deutscher Künstler fürs deutsche Haus

Die Sammlung enthält jetzt über 200 Bilder in den Größen 100×70 cm (M. 10.–), 75×55 cm (M. 7.50), 103×41 cm bzw. 93×41 (M. 5.–), 60×50 cm (M. 6.–), 55×42 cm (M. 4.–), 41×30 cm (M. 2.50). Geschmackvolle Rahmung aus eigener Werkstätte.

Neu: Kleine Kunstblätter

18×24 cm je M. 1.–. Liebermann, Im Park. Prenhel, Am Wehr. Hecker, Unter der alten Kastanie und Weihnachtsabend. Treuter, Bei Mondenschein. Weber, Apfelblüte.

Schattenbilder

K. W. Diefenbach „Per aspera ad astra". Album, die 34 Teilb. des vollst. Wandfrieses fortlaufend wiederg. (20½×25 cm) M. 12.–. Teilbilder als Wandfriese (42×80 cm) je M. 4.–, (35×18 cm) je M. 1.–, auch gerahmt in verschied. Ausführ. erhältlich.

„Göttliche Jugend". 2 Mappen, mit je 20 Blatt (25½×34 cm) je M. 7.50. Einzelbilder je M. –.60, auch gerahmt in versch. Ausführ. erhältlich.

Kindermusik. 12 Blätter (25½×34 cm) in Mappe M. 7.–, Einzelblatt M. –.60.

Gerda Luise Schmidt (20×15 cm) je M. —.50. Auch gerahmt in verschiedener Ausführung erhältlich. Blumenorakel. Reifenspiel. Der Besuch. Der Liebesbrief. Ein Frühlingsstrauß. Die Freunde. Der Brief an „Ihn". Annäherungsversuch. Am Spinett. Beim Wein. Ein Märchen. Der Geburtstag.

Teubners Künstlerpostkarten

(Ausf. Verzeichnis v. Verlag in Leipzig.) Jede Karte M. –.10. Reihe von 12 Karten in Umschlag M. 1.–, jede Karte unter Glas mit schwarzer Einfassung u. Schnur eckig oder oval.

Die mit * bezeichneten Reihen auch in feinen ovalen Holzrähmchen eckig oder oval. **Teubners Künstlersteinzeichnungen in 12 Reihen. Teubners Künstlerpostkarten nach Gemälden neuerer Meister.** 1. Macco, Maienzeit. 2. Köselitz, Sonnenblick. 3. Buttersack, Sommer im Moor. 4. Hartmann, Sommerweide. 5. Kühn jr., Im weißen Zimmer. In Umschlag M. —.50. ***Diefenbachs Schattenbilder in 7 Reihen. Aus dem Kinderleben,** 6 Karten nach Bleistiftzeichn. von Hela Peters. 1. Der gute Bruder. 2. Der böse Bruder. 3. Wo drückt der Schuh? 4. Schmeichelkätzchen. 5. Püppchen, aufgepaßt! 6. Große Wäsche. In Umschlag M. —.50. ***Schattenrißkarten von Gerda Luise Schmidt:** 1. Reihe: Spiel und Tanz, Fest im Garten, Blumenorakel, Die kleine Schäferin, Belauschter Dichter, Rattenfänger von Hameln. 2. Reihe: Die Freunde, Der Besuch, Im Grünen, Reifenspiel, Ein Frühlingsstrauß, Der Liebesbrief. 3. Reihe: Der Brief an „Ihn", Annäherungsversuch, Am Spinett, Beim Wein, Ein Märchen, Der Geburtstag. Jede Reihe in Umschlag M. —.50

Rudolf Schäfers Bilder nach der Heiligen Schrift

Der barmherzige Samariter, Jesus der Kinderfreund, Das Abendmahl, Hochzeit zu Kana, Weihnachten, Die Bergpredigt (75×55 bzw. 60×50 cm). M. 7.50 bzw. M. 6.—.

Diese 6 Blätter in Format 28×36 unter dem Titel **Biblische Bilder** in Mappe M. 4.50, als Einzelblatt je M. –.75 (Auch als „Kirchliche Gedenkblätter" und als „Glückwunsch- u. Einladungskarten" erhältlich.)

Karl Bauers Federzeichnungen

Charakterköpfe zur deutschen Geschichte. Mappe, 32 Bl. (28×36 cm) M. 5.—
12 Bl. . . . . M. 2.—
Aus Deutschlands großer Zeit 1813. In Mappe, 16 Bl. (28×36 cm) M. 2.50
Führer und Helden im Weltkrieg. Einzelne Blätter (28×36 cm) M. —.30
2 Mappen, enthaltend je 12 Blätter, je . . . . M. 1.—

Katalog über künstlerischen Wandschmuck gegen Voreinsendung des Betrages (Höhe ist gegen Rückporto zu erfragen) oder gegen Nachnahme vom Verlag in Leipzig, Poststraße 3, erhältlich

Verlag von B. G. Teubner in Leipzig und Berlin

Anfragen ist Rückporto beizufügen

